TÔ THỊ NGA (Chủ biên)

NÂNG CAO KỸ NĂNG GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

100% DẠNG BÀI

- MŨ - LOGARIT
- SỐ PHỨC

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

TÔ THỊ NGA

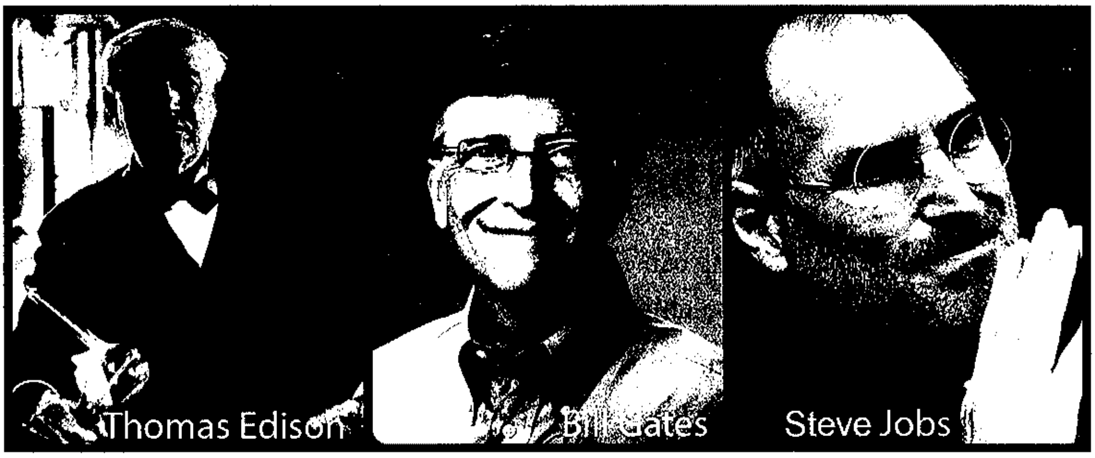
NÂNG CAO KỸ NĂNG GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM 100% DẠNG BÀI

- MŨ - LOGARIT
- SỐ PHỨC

- Bí quyết ôn nhanh, nhớ lâu qua lời giải chi tiết
- Đột phá tư duy làm bài, đầy đủ dạng bài tập.
- Dành cho học sinh luyện thi THPT Quốc gia

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

THAY LỜI NÓI ĐẦU



TRẮC NGHIỆM TOÁN - MỘT LỐI TƯ DUY MỚI

Thân gửi lời yêu thương đến toàn thể các em học sinh, các bậc phụ huynh cùng các thầy cô giáo!

Như mọi người đã biết, nền giáo dục của đất nước chúng ta đang thay đổi từng ngày để kịp thích nghi với xu hướng giáo dục tiến bộ trên thế giới. Lần đầu tiên giáo dục Việt Nam, môn Toán được thi dưới hình thức trắc nghiệm.

Thực tế cho thấy, tại nhiều quốc gia có nền giáo dục phát triển trên thế giới, hình thức này đã được áp dụng từ lâu. Chẳng hạn trong bài thi SAT và ACT của Mỹ có khoảng 50 câu hỏi trắc nghiệm, và việc thi Toán trắc nghiệm ở quốc gia này hàng năm vẫn thu hút được hàng triệu lượt thí sinh tham gia ứng tuyển vào khoảng 1800 trường Đại học tại Hoa Kỳ.

Tuy nhiên ở Việt Nam, phải đến năm 2017 hình thức này mới được cập nhật và áp dụng lần đầu tiên cho kỳ thi THPT Quốc gia. Do đây là năm đầu tiên áp dụng hình thức thi này nên rất nhiều em học sinh chưa kịp thích nghi, rơi vào trạng thái hoang mang; còn các thầy cô cũng gặp nhiều khó khăn khi phải xoay xở cách dạy học, cách ra đề mới. Hơn thế, tài liệu về trắc nghiệm Toán trên thị trường còn khan hiếm, gần như không thể đáp ứng được nhu cầu khổng lồ trên.

Chính vì thế Megabook cùng đội ngũ tác giả đã dày công nghiên cứu cho ra đời Bộ sách này.

Đây là Bộ sách về trắc nghiệm Toán đầu tiên ở Việt Nam với 100% dạng bài trắc nghiệm. Mọi hệ thống lý thuyết cũng như các dạng bài tập được biên soạn lại và chọn lọc kỹ càng đảm bảo giúp các em học sinh có thể hình dung rõ ràng về dạng đề mới và luyện tập đề một cách thành thạo nhất.

Đây có thể không phải là cuốn sách hay nhất, nhưng chắc chắn là cuốn sách phù hợp nhất cho những ai muốn dạy tốt và học tốt trắc nghiệm Toán, những ai muốn đỗ kỳ thi THPT Quốc gia với điểm Toán vượt trội, và hơn hết là với những ai muốn hiểu thật rõ, hiểu thật sâu bản chất môn Toán để học thật, thi thật và sống thật.

Thân ái gửi tặng các em học sinh, các bậc phụ huynh cùng các thầy cô Bộ sách tâm huyết này!

ĐỘI NGŨ TÁC GIẢ.

Dành cho những ai muốn thành công
và hạnh phúc trước tuổi 35 !

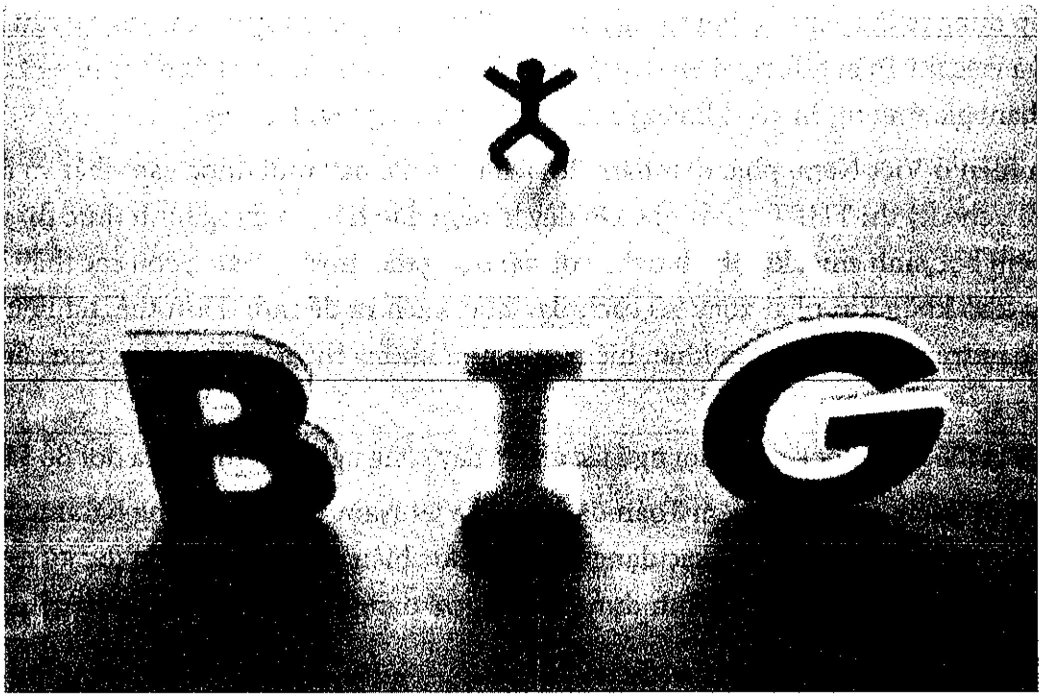
MỤC TIÊU LÀ KIM CHỈ NAM DẪN ĐƯỜNG CHÚNG TA ĐI

Khởi đầu cho mỗi chặng đường cần có động lực để bước đi, để có động lực bước đi thì mục tiêu chính là ngòi nổ để thúc đẩy sự chinh phục đầy thú vị.

Các em thân mến, các em đã tự hỏi xem mình đã có "ngòi nổ" nào cho năm học mới chưa? Cho việc học Toán cũng như chinh phục cuốn sách trắc nghiệm Toán này chưa? Và xa hơn là chặng đường cho cuộc sống 5 năm tới nữa chưa?

Cho dù có hoặc chưa có trong tâm trí một mục tiêu thì chỉ cần các em viết ra, viết ra những mục tiêu của bản thân thì nó sẽ trở nên rõ ràng hơn rất nhiều. Bởi vì, "Sự rõ ràng tạo nên sức mạnh!" Các em chỉ đến được ĐÍCH một khi các em biết mình đang muốn đi đến đâu, trở thành ai, đạt được điều gì sau 1 năm, 2 năm, 5 năm nữa?

Vậy nên hãy dành 30 phút để hình dung, tưởng tượng về cái ĐÍCH đó rồi viết ra em nhé.



CHUYÊN ĐỀ 1

MŨ - LOGARIT

VẤN ĐỀ 1

LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

Chủ đề 1:

LŨY THỪA - LOGARIT

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Lũy thừa

1.1. Khái niệm lũy thừa

1.1.1. Lũy thừa với số mũ nguyên

a) Định nghĩa: Cho n là một số nguyên dương.

Với a là số thực tùy ý, lũy thừa bậc n của a là tích của n thừa số a

$a^n = \underbrace{a.a.....a}_{\text{n thừa số}}$

Với $a \neq 0$

$a^0 = 1,$

$a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}.$

Trong biểu thức a^n ta gọi a là cơ số, số nguyên n là số mũ.

Chú ý: 0^0 và 0^{-n} không có nghĩa.

b) Tính chất

Lũy thừa với số mũ nguyên có các tính chất tương tự của lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Định lí 1: (Quy tắc tính)

Với $a \neq 0, b \neq 0$ và với các số nguyên m, n ta có:

$a^m.a^n = a^{m+n};$	$\dfrac{a^m}{a^n} = a^{m-n};$
$(a^m)^n = a^{mn};$	$(ab)^n = a^n b^n;$
$\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}.$	

Tính giá trị của biểu thức: $A=\left(\frac{1}{2}\right)^{-10}.8^{-3}+(0,2)^{-4}.25^{-2}+81^{-1}.\left(\frac{1}{3}\right)^{-7}$.

Giải:

$$A=2^{10}.\frac{1}{8^3}+\frac{1}{0,2^4}.\frac{1}{25^2}+\frac{1}{81}.3^7=2^{10}.\frac{1}{2^6}+\frac{1}{0,2^4}.\frac{1}{5^4}+\frac{1}{3^4}.3^7$$

$$=2^4+\frac{1}{(0,2.5)^4}+3^3=16+1+27=44.$$

◆ **Định lí 2:** (So sánh các lũy thừa)

Cho m, n là những số nguyên. Khi đó:

1) Với a > 1 thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi m > n.

2) Với 0 < a < 1 thì $a^m>a^n$ khi và chỉ khi m < n.

Hệ quả 1: Với 0 < a < b và m là số nguyên thì:

1) $a^m<b^m$ khi và chỉ khi m > 0.

2) $a^m>b^m$ khi và chỉ khi m < 0.

Hệ quả 2: Với a < b, n là số tự nhiên lẻ thì $a^n<b^n$.

Hệ quả 3: Với a, b là những số dương, n là một số nguyên khác 0 thì $a^n=b^n$ khi và chỉ khi a = b.

So sánh $A=(0,99)^3.99$ và $B=99$.

Giải:

Vì 0 < 0,99 < 1 nên $(0,99)^3<1^3=1\Rightarrow A<1.99=99=B\Leftrightarrow A<B$.

1.1.2. Căn bậc n

a) Định nghĩa: Cho số thực b và số nguyên dương n. Số a được gọi là căn bậc n của số b nếu $a^n=b$.

- Khi n là số lẻ, mỗi số thực a chỉ có một căn bậc n, được kí hiệu là $\sqrt[n]{a}$.

- Khi n là số chẵn, mỗi số thực dương a có đúng hai căn bậc n là hai số đối nhau $\sqrt[n]{a}$ và $-\sqrt[n]{a}$.

3 và -3 là hai căn bậc 4 của 84, $-\frac{1}{2}$ là căn bậc 5 của $-\frac{1}{32}$.

Nhận xét:

1) Căn bậc 1 của số a chính là a.

2) Căn bậc n của số 0 là 0.

3) Số âm không có căn bậc chẵn, vì lũy thừa bậc chẵn của một số thực bất kì là số không âm.

4) Với n nguyên dương lẻ thì:

$\sqrt[n]{a} > 0$ khi $a > 0$;

$\sqrt[n]{a} < 0$ khi $a < 0$.

5) $\sqrt[n]{a^n} = \begin{cases} a & \text{khi n lẻ} \\ |a| & \text{khi n chẵn.} \end{cases}$

b) Tính chất

1) $\sqrt[n]{a}.\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$; 2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$; 3) $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$; 4) $\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}} = \sqrt[nk]{a}$.

1.1.3. Lũy thừa với số mũ hữu tỉ

Cho số thực a dương và số hữu tỉ $r = \dfrac{m}{n}$, trong đó $m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{N}, n \ge 2$. Lũy thừa của a với số mũ r là số a^r xác định bởi:

$$a^r = a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}.$$

$\left(\dfrac{1}{16}\right)^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{\dfrac{1}{16}} = \dfrac{1}{2}$, $8^{-\frac{3}{2}} = \sqrt{8^{-3}} = \dfrac{1}{\sqrt{8^3}} = \dfrac{1}{\sqrt{2^9}} = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$.

1.1.4. Lũy thừa với số mũ vô tỉ

Định nghĩa: Ta gọi giới hạn của dãy số $\left(a^{r_n}\right)$ là lũy thừa của a với số mũ α, kí hiệu là a^α.

$a^\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} a^{r_n}$ với $\alpha = \lim\limits_{n \to +\infty} r_n$.

Nhận xét: $1^\alpha = 1 \ (\alpha \in \mathbb{R})$.

1.2. Tính chất của lũy thừa với số mũ thực

Lũy thừa với số mũ thực có các tính chất tương tự với lũy thừa với số mũ nguyên dương.

Cho a, b là những số thực dương; α, β là những số thực tùy ý. Khi đó, ta có:

1) $a^\alpha.a^\beta = a^{\alpha+\beta}$;

2) $\dfrac{a^\alpha}{a^\beta} = a^{\alpha-\beta}$;

3) $\left(a^\alpha\right)^\beta = a^{\alpha\beta}$;

4) $(ab)^\alpha = a^\alpha b^\alpha$;

5) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^\alpha = \dfrac{a^\alpha}{b^\alpha}$.

Nếu $a > 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha > \beta$.

Nếu $a < 1$ thì $a^\alpha > a^\beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$.

Ví dụ: Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{a^{\frac{4}{3}}\left(a^{-\frac{1}{3}}+a^{\frac{2}{3}}\right)}{a^{\frac{1}{4}}\left(a^{\frac{3}{4}}+a^{-\frac{1}{4}}\right)}$.

Giải:

Ta có: $A=\dfrac{a+a^2}{a+1}=\dfrac{a(1+a)}{a+1}=a.$

Ví dụ: Chứng minh: $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\sqrt{5}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\sqrt{2}}$.

Giải:

Ta có: $20>18>0\Rightarrow\sqrt{20}>\sqrt{18}\Leftrightarrow 2\sqrt{5}>3\sqrt{2}.$

Mà $0<\dfrac{1}{2}<1$ nên $\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2\sqrt{5}}<\left(\dfrac{1}{2}\right)^{3\sqrt{2}}$.

2. Logarit

2.1. ***Định nghĩa:***

Cho a là một số dương khác 1 và b là một số dương. Số thực α để $a^\alpha=b$ được gọi là logarit cơ số a của b và kí hiệu là $\log_a b$, tức là: $\alpha=\log_a b\Leftrightarrow a^\alpha=b$.

Ví dụ: $\log_2 8=3$ vì $2^3=8$, $\log_2\dfrac{1}{8}=-3$ vì $2^{-3}=\dfrac{1}{2^3}=\dfrac{1}{8}$.

Chú ý:

1) Không có logarit của số 0 và số âm vì a^α luôn dương với mọi α.

2) Cơ số của logarit phải dương và khác 1.

$\log_a 1=0,\ \log_a a=1;$

3) $\log_a a^b=b,\forall b\in\mathbb{R};$

$a^{\log_a b}=b,\forall b\in\mathbb{R},b>0.$

2.2. Tính chất

2.2.1. So sánh hai logarit cùng cơ số

Định lí: Cho số dương a khác 1 và các số dương b, c.

1) Khi $a>1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b>c$.

2) Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>\log_a c\Leftrightarrow b<c$.

Hệ quả: Cho số dương a khác 1 và các số dương b, c.

1) Khi $a>1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b>1$.

2) Khi $0<a<1$ thì $\log_a b>0\Leftrightarrow b<1$.

3) $\log_a b=\log_a c\Leftrightarrow b=c$.

Ví dụ So sánh $\log_{\frac{3}{7}}\frac{2}{3}$ và $\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{7}$.

Giải:

Vì $0<\frac{3}{7}<1$ và $0<\frac{2}{3}<1$ nên $\log_{\frac{3}{7}}\frac{2}{3}>\log_{\frac{3}{7}}1=0$.

Vì $\frac{3}{2}>1$ và $0<\frac{3}{7}<1$ nên $\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{7}<\log_{\frac{3}{7}}1=0$.

Vậy $\log_{\frac{3}{7}}\frac{2}{3}>\log_{\frac{3}{2}}\frac{3}{7}$.

2.2.2. Các quy tắc tính lôgarit

Định lí: Với số a dương khác 1 và các số dương b, c ta có:

1) $\log_a(bc)=\log_a b+\log_a c$.

2) $\log_a\left(\frac{b}{c}\right)=\log_a b-\log_a c$.

3) $\log_a b^{\alpha}=\alpha\log_a b$.

Chú ý: Với các số dương $b_1,b_2,...,b_n$, ta có:

$\log_a(b_1b_2...b_n)=\log_a b_1+\log_a b_2+...+\log_a b_n$.

Hệ quả: Với số dương a khác 1, số dương b và số nguyên dương n, ta có:

1) $\log_a\frac{1}{b}=-\log_a b$. 2) $\log_a\sqrt[n]{b}=\frac{1}{n}\log_a b$.

Ví dụ Tính $A=\log_3 4-\log_3 6+2\log_3\sqrt{2}$.

Giải:

Ta có:

$$A=\log_3 2^2-\log_3(2.3)+2.\frac{1}{2}\log_3 2=2\log_3 2-\log_3 2-\log_3 3+\log_3 2=2\log_3 2-1.$$

2.3. Đổi cơ số của lôgarit

Định lí: Với a, b là hai số dương khác 1 và c là số dương, ta có:

$\log_b c=\frac{\log_a c}{\log_a b}$ hay $\log_a b.\log_b c=\log_a c$.

Hệ quả 1: Với a, b là hai số dương khác 1, ta có:

$\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ hay $\log_a b.\log_b a=1$.

Hệ quả 2: Với a là số dương khác 1, c là số dương và $\alpha\neq 0$, ta có:

$\log_{a^{\alpha}}c=\frac{1}{\alpha}\log_a c$.

Tìm x, biết: $\log_2 x + \log_4 x = 3$.

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, ta có:

$$\log_2 x + \log_4 x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \log_{2^2} x = 3 \Leftrightarrow \log_2 x + \frac{1}{2}\log_2 x = 3 \Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x = 3$$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy $x = 4$.

2.4. Logarit thập phân. Logarit tự nhiên

2.4.1. Logarit thập phân

Định nghĩa: Logarit thập phân là logarit cơ số 10.

$\log_{10} b$ thường được viết là logb hoặc lgb.

2.4.2. Logarit tự nhiên

Định nghĩa: Logarit tự nhiên là logarit cơ số e.

$\log_e b$ thường được viết là lnb.

II BÀI TẬP

Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(A) Với số thực a và số nguyên m, n, ta có: $a^m.a^n = a^{m.n}; \frac{a^m}{a^n} = a^{m:n}$.

(B) Với hai số thực a, b cùng khác 0 và số nguyên n, ta có: $(ab)^n = a^n b^n; \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

(C) Với hai số thực a, b thỏa mãn $0 < a < b$ và số nguyên n ta có: $a^n < b^n$.

(D) Với số thực a khác 0 và hai số nguyên m, n, ta có: Nếu $m > n$ thì $a^m > a^n$.

Giải:

Khẳng định (A) sai, sửa lại: Với số thực $a \neq 0$ và các số nguyên m, n, ta có:

$a^m.a^n = a^{m+n}, \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$.

Khẳng định (B) đúng.

Khẳng định (C) sai, sửa lại là: Với hai số thực a, b thỏa mãn $0 < a < b$ và số nguyên $n > 0$ ta có: $a^n < b^n$.

Khẳng định (D) sai, sửa lại: Với số thực $a > 1$ và hai số nguyên m, n, ta có: Nếu $m > n$ thì $a^m > a^n$.

Vậy chỉ có khẳng định (B) đúng $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Với điều kiện nào của a thì khẳng định sau là ĐÚNG?

"Với số thực a và hai số hữu tỉ r, s, ta có $\left(a^r\right)^s = a^{rs}$".

(A) a bất kì; **(B)** $a \neq 0$; **(C)** $a > 0$; **(D)** $a < 1$.

Giải:

Điều kiện: $a > 0 \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Khẳng định nào là ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) Cơ số của logarit là một số thực bất kì.

(B) Cơ số của logarit phải là số nguyên.

(C) Cơ số của logarit phải là số nguyên dương.

(D) Cơ số của logarit phải là số dương khác 1.

Giải:

Chọn (D).

Trong các khẳng định sau đây, khẳng định nào là ĐÚNG?

(A) Có logarit của một số thực bất kì.

(B) Chỉ có logarit của một số thực dương.

(C) Chỉ có logarit của một số thực dương khác 1.

(D) Chỉ có logarit của một số thực lớn hơn 1.

Giải:

Chọn (B).

Cho các số thực a, b, c và $0 < a \neq 1,\ b > 0,\ c > 0$. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG?

(A) $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c$; **(B)** $\log_a(bc) = \log_a(-b).\log_a(-c)$;

(C) $\log_a(bc) = \log_a b.\log_a c$; **(D)** $\log_a(bc) = \log_a(-b) + \log_a(-c)$.

Giải:

Vì b và $c > 0$ nên $\log_a(bc) = \log_a b + \log_a c \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Cho a, b, c là các số thực dương và $a, b \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là SAI?

(A) $\log_a c = \dfrac{\log_b c}{\log_b a}$; **(B)** $\log_a c = \log_a b.\log_b c$;

(C) $\log_a c = \dfrac{1}{\log_c a}$; **(D)** $\log_a b.\log_b a = 1$.

Giải:

Các khẳng định (A), (B) và (D) đúng.

Khẳng định (C) sai, vì thiếu điều kiện $c \neq 1$.

$\Rightarrow$ Chọn (C).

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 7 Giá trị của biểu thức $9^{\log_3 6}$ là:

(A) 36; **(B)** 12; **(C)** 64; **(D)** 81.

Giải:

Ta có: $9^{\log_3 6} = 3^{2\log_3 6} = \left(3^{\log_3 6}\right)^2 = 6^2 = 36$.

Chọn (A).

Lưu ý:

1. Nhớ lại công thức: $a^{\log_a b} = b$, trong đó $0 < a \neq 1, b > 0$.

2. Có thể sử dụng Casio như sau:

Bấm máy tính biểu thức trên. Nhập $9^{\log_3 6}$ ta được kết quả là 36.

Bài tập 8 Giá trị của biểu thức $81^{\log_9 2}$ là:

(A) 81; **(B)** 4; **(C)** 18; **(D)** 9.

Giải:

Ta có $81^{\log_9 2} = 9^{2\log_9 2} = \left(9^{\log_9 2}\right)^2 = 2^2 = 4$.

Chọn (B).

Bài tập 9 Giá trị của biểu thức $\log_2 25 - \log_2 100$ bằng:

(A) -4; **(B)** 4; **(C)** 2; **(D)** -2.

Giải:

Ta có: $\log_2 25 - \log_2 100 = \log_2 \frac{25}{100} = \log_2 \frac{1}{4} = \log_2 2^{-2} = -2$. **Chọn (D).**

Chú ý: Vì 2 > 1 nên $\log_2 25 < \log_2 100 \Rightarrow \log_2 25 - \log_2 100 < 0 \Rightarrow$ dễ dàng loại trừ phương án (B) và (C).

Bài tập 10 Giá trị của $\log_{a^5} a$ là:

(A) 5; **(B)** $\frac{1}{5}$; **(C)** $-\frac{1}{5}$; **(D)** -5.

Giải:

Ta có: $\log_{a^5} a = \frac{1}{5}\log_a a = \frac{1}{5} \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Nhớ lại công thức $\log_{a^\alpha} b = \frac{1}{\alpha}\log_a b$, trong đó $0 < a \neq 1; b > 0$.

Bài tập 11. Rút gọn biểu thức: $A=\log_2\sqrt{a}+\log_4\frac{1}{a^2}-\log_{\sqrt{2}}a^8$ với $a>0$.

(A) $A=-\frac{33}{2}\log_2 a$; **(B)** $A=\frac{33}{2}\log_2 a$; **(C)** $A=33\log_2 a$; **(D)** $A=-\frac{1}{2}\log_a 2$.

Giải:

Ta có:

$A=\frac{1}{2}\log_2 a+\frac{1}{2}.(-2)\log_2 a-2.8\log_2 a=\frac{1}{2}\log_2 a-\log_2 a-16\log_2 a=-\frac{33}{2}\log_2 a$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Cho $a=2$. Nhập vào máy tính ta được kết quả bằng $-\frac{33}{2}$. Chọn (A).

Bài tập 12. Giá trị của biểu thức $P=\log_{\sqrt{a}}\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}$ là:

(A) $\frac{15}{8}$; **(B)** $\frac{15}{4}$; **(C)** $\frac{15}{16}$; **(D)** $\frac{15}{32}$.

Giải:

Ta có: $\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a}}}}=\sqrt{a\sqrt{a\sqrt{a.a^{\frac{1}{2}}}}}=\sqrt{a\sqrt{a.a^{\frac{3}{4}}}}=\sqrt{a.a^{\frac{7}{8}}}=a^{\frac{15}{16}}$

$\Rightarrow A=\log_{\sqrt{a}}a^{\frac{15}{16}}=2.\frac{15}{16}=\frac{15}{8}$.

Chọn (A).

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Chọn $a=2$ nhập vào máy tính $\log_{\sqrt{2}}\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2\sqrt{2}}}}$ ta được kết quả là $\frac{15}{8}$.

Bài tập 13. Biết $\log_5\sqrt{a}=2$ thì $\log_5 a$ bằng:

(A) 25; **(B)** 5; **(C)** 625; **(D)** 75.

Giải:

Ta có: $\log_5\sqrt{a}=2\Leftrightarrow\sqrt{a}=5^2=25\Leftrightarrow a=25^2=625$.

Chọn (C).

Bài tập 14. Giá trị của biểu thức $A=5\log_2\log_4 16+\log_{\frac{1}{3}}3$ là:

(A) 2; **(B)** 4; **(C)** 5; **(D)** 6.

Giải:

Ta có: $A=5\log_2\log_4 4^2-\log_3 3=5\log_2 2-1=5-1=4$.

Chọn (B)

[redacted] Tính $A = \log_3 6.\log_8 9.\log_6 2$.

(A) $A = 1$; **(B)** $A = 6$; **(C)** $A = -\frac{2}{3}$; **(D)** $A = \frac{2}{3}$.

Giải:

Ta có:

$$A = (\log_3 6.\log_6 2).\log_8 9 = \log_3 2.\log_8 9 = \log_3 2.\log_{2^3} 3^2 = (\log_3 2).\frac{2}{3}\log_2 3 = \frac{2}{3}.$$

Chọn (A).

Lưu ý: Nhớ lại công thức: $\log_a c = \log_a b.\log_b c$.

[redacted] Tính $\log_{\sqrt{6}} 3.\log_3 36$ được kết quả là:

(A) 1; **(B)** 4; **(C)** 2; **(D)** 36.

Giải:

Ta có: $\log_{\sqrt{6}} 3.\log_3 36 = \log_{\sqrt{6}} 36 = 2\log_6 36 = 2\log_6 6^2 = 4$.

Chọn (B).

[redacted] Tính $\log_{\sqrt{3}} 8.\log_4 81$ được kết quả là:

(A) 3; **(B)** 4; **(C)** 12; **(D)** 6.

Giải:

Ta có:

$$\log_{\sqrt{3}} 8.\log_4 81 = 2\log_3 2^3.\log_{2^2} 3^4 = 2.3.(\log_3 2).\frac{1}{2}.4(\log_2 3) = 12\log_3 2.\log_2 3 = 12.1 = 12.$$

Chọn (C).

[redacted] Tìm x, biết: $\log_x \sqrt[10]{2} = 0,2$.

(A) $x = 2$; **(B)** $x = 4$; **(C)** $x = \frac{1}{2}$; **(D)** $x = \sqrt{2}$.

Giải:

Điều kiện: $0 < x \neq 1$.

Ta có:

$$\log_x \sqrt[10]{2} = 0,2 \Leftrightarrow \frac{1}{10}\log_x 2 = 0,2 \Leftrightarrow \log_x 2 = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x} = 2 \Leftrightarrow \log_2 x = \frac{1}{2}$$

$\Leftrightarrow x = 2^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$ (Thỏa mãn)

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 19 [Đề minh họa Quốc gia năm 2017]

Cho các số thực dương a, b với $a \neq 1$. Khẳng định nào sau đây là khẳng định đúng?

(A) $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a b$; **(B)** $\log_{a^2}(ab) = 2 + 2\log_a b$;

(C) $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{4}\log_a b$; **(D)** $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$.

Giải:

Ta có: $\log_{a^2}(ab) = \frac{1}{2}\log_a(ab) = \frac{1}{2}(\log_a a + \log_a b) = \frac{1}{2}(1 + \log_a b) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_a b$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 20 Cho $\log_a b = 2, \log_a c = -3$. Hãy tính $\log_a x$, biết: $x = a^2b^3\sqrt{c}$.

(A) 2; **(B)** 14; **(C)** $\frac{19}{2}$; **(D)** $\frac{13}{2}$.

Giải:

Ta có: $\log_a x = \log_a\left(a^2b^3\sqrt{c}\right) = \log_a a^2 + \log_a b^3 + \log_a \sqrt{c} = 2 + 3\log_a b + \frac{1}{2}\log_a c$

$= 2 + 3.2 + \frac{1}{2}.(-3) = \frac{13}{2}$.

Chọn (D).

Bài tập 21 Cho $\log_4 x = \frac{1}{2}$. Giá trị của biểu thức $P = \log_2 x^2 - \log_2 x^3 + \log_4 x$ bằng:

(A) $-\frac{3}{2}$; **(B)** $-\frac{1}{2}$; **(C)** 1; **(D)** -3.

Giải:

Ta có: $\log_4 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 4^{\frac{1}{2}} = 2$.

Với x = 2 thì $P = \log_2 2^2 - \log_2 2^3 + \log_4 2 = 2 - 3 + \frac{1}{2}\log_2 2 = -1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 22 Cho $\log_a b = 2, \log_a c = -3$. Hãy tính $\log_a x$, biết: $x = \frac{a^5\sqrt[3]{b}}{c^2}$.

(A) $\frac{35}{3}$; **(B)** 17; **(C)** 5; **(D)** $-\frac{1}{3}$.

Giải:

Ta có: $\log_a x = \log_a\left(\frac{a^5\sqrt[3]{b}}{c^2}\right) = \log_a a^5 + \log_a \sqrt[3]{b} - \log_a c^2 = 5 + \frac{1}{3}\log_a b - 2\log_a c$

$= 5 + \frac{1}{3}.2 - 2(-3) = \frac{35}{3}$.

Chọn (A).

Bài tập 23 Rút gọn biểu thức $A=\log_a b^2+\log_{a^2} b^4$ được kết quả là

(A) $4\log_a|b|$; (B) $4\log_a b$; (C) $10\log_a|b|$; (D) $10\log_a b$.

Giải:

Điều kiện: $0<a\neq 1, b\neq 0$.

Ta có: $A=2\log_a|b|+\frac{1}{2}.4\log_a|b|=4\log_a|b|$.

Chọn (A).

Bài tập 24 Rút gọn biểu thức: $A=\left(4^{\frac{1}{3}}-10^{\frac{1}{3}}+25^{\frac{1}{3}}\right)\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\right)$.

(A) A = -3; (B) A = 7; (C) A = 3; (D) A = 10.

Giải:

$$A=\left[\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^2-2^{\frac{1}{3}}.5^{\frac{1}{3}}+\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^2\right].\left(2^{\frac{1}{3}}+5^{\frac{1}{3}}\right)=\left(2^{\frac{1}{3}}\right)^3+\left(5^{\frac{1}{3}}\right)^3=2+5=7.$$

Chọn (B).

Lưu ý: Có thể sử dụng máy tính để tìm kết quả.

Bài tập 25 Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{xy^{\frac{1}{2}}-yx^{\frac{1}{2}}}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}$.

(A) $A=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}$; (B) $A=x-y$; (C) $A=xy$; (D) $A=-x+y$.

Giải:

$$A=\frac{x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}\left(x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}\right)}{x^{\frac{1}{2}}-y^{\frac{1}{2}}}=x^{\frac{1}{2}}y^{\frac{1}{2}}.$$

Chọn (A).

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Chọn $x=5; y=4$. Bấm máy tính ta được $A=2\sqrt{5}=(xy)^{\frac{1}{2}}$. Chọn A.

Bài tập 26 Tính $A=\dfrac{\left(a^{\frac{3}{4}}-b^{\frac{3}{4}}\right)\left(a^{\frac{3}{4}}+b^{\frac{3}{4}}\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab},(a,b>0)$.

(A) $A=a^3-b^3-\sqrt{ab}$; (B) $A=a+b-3\sqrt{ab}$;

(C) $A=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2$; (D) $A=\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2$.

Giải:

$$A=\frac{a^{\frac{3}{2}}-b^{\frac{3}{2}}}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}=\frac{\left(a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a+a^{\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}+b\right)}{a^{\frac{1}{2}}-b^{\frac{1}{2}}}-\sqrt{ab}=a+\sqrt{ab}+b-\sqrt{ab}=a+b-2\sqrt{ab}$$

$$=\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^{2}.$$

Chọn (C).

Bài tập 27 Cho $A=(0,3)^{0,4}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là ĐÚNG?

(A) $A>1$; **(B)** $A<1$; **(C)** $A=1$; **(D)** $A\le 1$.

Giải:

Vì $0,3<1$ nên $(0,3)^{0,4}>1^{0,4}=1\Rightarrow A>1$.

Chọn (A).

Bài tập 28 So sánh $A=(0,5)^{0,5}$ và $B=(0,3)^{0,5}$.

(A) $A<B$; **(B)** $A=B$; **(C)** $A>B$; **(D)** $A\le B$.

Giải:

Ta có: $\frac{A}{B}=\left(\frac{0,5}{0,3}\right)^{0,5}=\left(\frac{5}{3}\right)^{0,5}>1^{0,5}=1$ (vì $\frac{5}{3}>1$)

$\Rightarrow A>B$.

Chọn (C).

Bài tập 29 Cho $\left(\sqrt{2}-1\right)^{a}<\left(\sqrt{2}-1\right)^{b}$. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG?

(A) $a=b$; **(B)** $a<b$; **(C)** $a>b$; **(D)** $a\le b$.

Giải:

Vì $0<\sqrt{2}-1<1$ nên $\left(\sqrt{2}-1\right)^{a}<\left(\sqrt{2}-1\right)^{b}\Leftrightarrow a>b$.

Chọn (C).

Bài tập 30 [Đề minh họa Quốc gia năm 2017]

Cho hai số thực a và b, với $1<a<b$. Khẳng định nào dưới đây là khẳng định đúng?

(A) $\log_a b<1<\log_b a$; **(B)** $1<\log_a b<\log_b a$;

(C) $\log_b a<\log_a b<1$; **(D)** $\log_b a<1<\log_a b$.

Giải:

Vì $1<a<b$ nên $\log_a a<\log_a b\Leftrightarrow 1<\log_a b$ (1)

Vì $1<a<b$ nên $\log_b a<\log_b b=1$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow \log_b a < 1 < \log_a b \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Có thể nhận xét như sau:

Với $a = 2, b = 4$ ta có $\log_2 4 > 1 > \log_4 2$. **Chọn (D).**

Bài tập 3 Số a thỏa mãn $\log_{\frac{1}{3}} a < \log_{\frac{1}{3}} a^2$ là:

(A) $\frac{1}{2}$; **(B)** $-\frac{1}{2}$; **(C)** $\frac{5}{3}$; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} a > 0 \\ a^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 0.$

Vì $0 < \frac{1}{3} < 1$ nên $\log_{\frac{1}{3}} a < \log_{\frac{1}{3}} a^2 \Leftrightarrow a > a^2 \Leftrightarrow a(a-1) < 0 \Leftrightarrow 0 < a < 1$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 2 Nếu $\log_{12} 18 = x$ thì $\log_2 3$ bằng:

(A) $\frac{1-2x}{x-2}$; **(B)** $\frac{x-1}{2x-2}$; **(C)** $\frac{2x-1}{x-2}$; **(D)** $\frac{1-x}{x-2}$.

Giải:

Ta có: $x = \log_{12} 18 = \log_{12} 2.\log_2 18 = \frac{1}{\log_2 12}.\log_2(2.3^2) = \frac{1}{\log_2(2^2.3)}.\log_2(2.3^2)$

$= \frac{1}{2+\log_2 3}.(1+2\log_2 3)$

$x.(2+\log_2 3) = 1 + 2\log_2 3 \Leftrightarrow (x-2)\log_2 3 = 1-2x \Leftrightarrow \log_2 3 = \frac{1-2x}{x-2}.$

Chọn (A).

Cho $a = \log_{20} 3, b = \log_{20} 5$. Tính $\log_{20} 2025$ theo a và b.

(A) $\frac{a}{4}+\frac{b}{2}$; **(B)** $-\frac{a}{4}-\frac{b}{2}$; **(C)** 4a + 2b; **(D)** -4a – 2b.

Giải:

Ta có: $\log_{20} 2025 = \log_{20}(3^4.5^2) = \log_{20} 3^4 + \log_{20} 5^2 = 4\log_{20} 3 + 2\log_{20} 5 = 4a + 2b.$

Chọn (C).

Cho $c = \log_{21} 3$. Tính $\log_{49} 21$ theo a.

(A) $\frac{1}{2-2c}$; **(B)** $\frac{1}{2c}$; **(C)** 2c; **(D)** 2 – 2c.

Giải:

Ta có: $c=\log_{21}3=\dfrac{1}{\log_3 21}=\dfrac{1}{\log_3(3.7)}=\dfrac{1}{\log_3 3+\log_3 7}=\dfrac{1}{1+\log_3 7}\Rightarrow \log_3 7=\dfrac{1}{c}-1$

$\Rightarrow \log_7 3=\dfrac{c}{1-c}$.

Ta có: $\log_{49}21=\log_{7^2}(3.7)=\dfrac{1}{2}(\log_7 3+\log_7 7)=\dfrac{1}{2}(\log_7 3+1)=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{c}{1-c}+1\right)=\dfrac{1}{2-2c}$.

Chọn (A).

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Gán $c=\log_{21}3$ bằng thao tác $\log_{21}3$ SHIFT STO C.

Lấy các đáp án trừ đi $\log_{49}21$. Ví dụ: $\dfrac{1}{2-2c}-\log_{49}21$ ta được kết quả bằng 0. Chọn A.

Cho $x=\log_3 15, y=\log_3 10$. Tính $\log_{\sqrt{3}}50$ theo x và y.

(A) $x+y-1$; **(B)** $2(x+y-1)$; **(C)** $3(x+y+1)$; **(D)** $4(x+y-1)$.

Giải:

Ta có: $\log_{\sqrt{3}}50=2\log_3 50=2\log_3\dfrac{150}{3}=2(\log_3 15+\log_3 10-\log_3 3)=2(x+y-1)$.

Chọn (B).

[Đề minh họa Quốc gia năm 2017]

Đặt $a=\log_2 3$ và $b=\log_5 3$. Hãy biểu diễn $\log_6 45$ theo a và b.

(A) $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab}$; **(B)** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab}$;

(C) $\log_6 45=\dfrac{a+2ab}{ab+b}$; **(D)** $\log_6 45=\dfrac{2a^2-2ab}{ab+b}$.

Giải:

Ta có: $\log_6 45=\log_6(9.5)=\log_6 9+\log_6 5=\log_6 3^2+\dfrac{1}{\log_5 6}=2\log_6 3+\dfrac{1}{\log_5(2.3)}$

$$=\frac{2}{\log_3 6}+\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{2}{\log_3(2.3)}+\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}=\frac{2}{\log_3 2+1}+\frac{1}{\log_5 2+\log_5 3}$$

$$=\frac{2}{\dfrac{1}{\log_2 3}+1}+\frac{1}{\dfrac{\log_5 3}{\log_2 3}+\log_5 3}$$

$$=\frac{2}{\dfrac{1}{a}+1}+\frac{1}{\dfrac{b}{a}+b}=\frac{2a}{a+1}+\frac{a}{b(a+1)}=\frac{a+2ab}{ab+b}\Rightarrow \text{Chọn (C).}$$

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Gán $a=\log_2 3$ bằng thao tác: $\log_2 3$ SHIFT STO A

Tương tự gán $b=\log_5 3$. Lấy các kết của của 4 đáp án trừ đi $\log_6 45$

Ta có: $\frac{a+2ab}{ab+b}-\log_6 45=0$. **Chọn C.**

Bài tập 37: Tìm các số thực α thỏa mãn điều kiện: $a^{\alpha}+a^{-\alpha}=2\ (a>0)$.

(A) α bất kì; **(B)** $\alpha>0$; **(C)** $0<\alpha<1$; **(D)** $\alpha=0$.

Giải:

Sử dụng BĐT Cô-si cho hai số không âm a^{α} và $a^{-\alpha}$ ta có: $a^{\alpha}+a^{-\alpha}\ge 2\sqrt{a^{\alpha}.a^{-\alpha}}=2$.

Dấu = xảy ra khi và chỉ khi $a^{\alpha}=a^{-\alpha}\Leftrightarrow \alpha=-\alpha\Leftrightarrow 2\alpha=0\Leftrightarrow \alpha=0$.

Vậy $\alpha=0$ cần tìm.

Chọn (D).

Bài tập 38: Tập các số thực α thỏa mãn điều kiện $5^{|\alpha|}<125$ là:

(A) (-3; 3); **(B)** (-5; 5); **(C)** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$; **(D)** $(3;+\infty)$.

Giải:

Ta có: $5^{|\alpha|}<125\Leftrightarrow 5^{|\alpha|}<5^3\Leftrightarrow |\alpha|<3\Leftrightarrow -3<\alpha<3$.

Vậy $\alpha\in(-3;3)$.

Chọn (A).

Bài tập 39: Biết $9^x+9^{-x}=34$. Hãy tính 3^x+3^{-x}.

(A) -6; **(B)** 6; **(C)** $\frac{34}{3}$; **(D)** $\sqrt{34}$.

Giải:

Ta có: $(3^x+3^{-x})^2=3^{2x}+3^{-2x}+2.3^x.3^{-x}=9^x+9^{-x}+2=34+2=36\Rightarrow 3^x+3^{-x}=6$ (vì $3^x+3^{-x}>0$).

Chọn (B).

Bài tập 40: Cho $a=\sqrt{4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$ và $b=\sqrt{4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}}$. Khi đó, a + b bằng:

(A) $\sqrt{5}+1$; **(B)** 4; **(C)** 8; **(D)** $\sqrt{5}-1$.

Giải:

Ta có: $(a+b)^2=a^2+b^2+2ab$

$=4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}+4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}+2\sqrt{\left(4+\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)\left(4-\sqrt{10+2\sqrt{5}}\right)}$

$=8+2\sqrt{6-2\sqrt{5}}=8+2\sqrt{(\sqrt{5}-1)^2}=8+2(\sqrt{5}-1)=6+2\sqrt{5}=(\sqrt{5}+1)^2$

Vì $a+b>0$ nên $a+b=\sqrt{5}+1$.

Chọn (A).

Nhận xét: Có thể sử dụng máy tính CASIO để tính kết quả trên.

Bài tập 41: Cho hệ thức $a^2+b^2=7ab(a,b>0)$. Hệ thức nào sau đây là ĐÚNG?

(A) $2\log_2(a+b)=\log_2 a+\log_2 b$; **(B)** $4\log_2\frac{a+b}{6}=\log_2 a+\log_2 b$;

(C) $\log_2\frac{a+b}{3}=2(\log_2 a+\log_2 b)$; **(D)** $2\log_2\frac{a+b}{3}=\log_2 a+\log_2 b$.

Giải:

Ta có: $a^2+b^2=7ab \Leftrightarrow (a+b)^2-2ab=7ab \Leftrightarrow (a+b)^2=9ab$.

Vì $a,b>0$ nên $\log_2(a+b)^2=\log_2 9ab \Leftrightarrow 2\log_2(a+b)=\log_2 9+\log_2 ab \Leftrightarrow 2\log_2(a+b)$

$=2\log_2 3+\log_2 a+\log_2 b$

$\Leftrightarrow 2\left[\log_2(a+b)-\log_2 3\right]=\log_2 a+\log_2 b \Leftrightarrow 2\log_2\frac{a+b}{3}=\log_2 a+\log_2 b$.

Chọn (D).

Bài tập 42: Tính: $S=\log\tan 1^0+\log\tan 2^0+\log\tan 3^0+...+\log\tan 89^0$.

(A) $S=0$; **(B)** $S=45$; **(C)** $S=1$; **(D)** $S=46$.

Giải:

Ta có:

$S=\log\left(\tan 1^0.\tan 89^0\right)+\log\left(\tan 2^0.\tan 88^0\right)+...+\log\left(\tan 44^0.\tan 46^0\right)+\log\tan 45^0$

$S=\log\left(\tan 1^0\cot 1^0\right)+\log\left(\tan 2^0\cot 2^0\right)+...+\log\left(\tan 44^0.\cot 44^0\right)+\log\tan 45^0$

$S=\log 1+\log 1+...+\log 1+\log 1=0$.

Chọn (A).

Bài tập 43: Giá trị của biểu thức $S=\ln\left(2\sin 1^0\right).\ln\left(2\sin 2^0\right).\ln\left(2\sin 3^0\right)...\ln\left(2\sin 89^0\right)$ là:

(A) 1; **(B)** -1; **(C)** 0; **(D)** $\frac{2^{89}}{89}$.

Giải:

Ta có: $\ln\left(2\sin 30^0\right)=\ln\left(2.\frac{1}{2}\right)=\ln 1=0 \Rightarrow S=0 \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 44: Cho $0<a\neq 1, 0<b\neq 1, n\in \mathbb{N}^*$. Một học sinh tính $A=\frac{1}{\log_a b}+\frac{1}{\log_{a^2} b}+...+\frac{1}{\log_{a^n} b}$ theo các bước sau:

Bước 1: $S=\log_b a+\log_b a^2+...+\log_b a^n$.

Bước 2: $S=\log_b\left(a^1a^2a^3...a^n\right)$.

Bước 3: $S = \log_b a^{1.2.3...n}$.

Bước 4: $S = n!\log_b a$.

Hỏi đến bước mấy thì SAI?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Vì $a^1.a^2.a^3...a^n = a^{1+2+3+...+n}$ nên bạn học sinh đó đã tính sai từ bước 3 $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

D. Về đích

Bài tập 45 Giá trị của biểu thức $\dfrac{1}{\log_3 x} + \dfrac{1}{\log_{3^2} x} + \dfrac{1}{\log_{3^3} x} + ... + \dfrac{1}{\log_{3^n} x} = \dfrac{210}{\log_3 x}$ đúng với mọi x dương. Giá trị nguyên dương của n là:

(A) $n = 20$; **(B)** $n = 21$; **(C)** $n = 19$; **(D)** $n = 22$.

Giải:

$$\text{Vế trái} = \frac{1}{\log_3 x} + \frac{2}{\log_3 x} + \frac{3}{\log_3 x} + ... + \frac{n}{\log_3 x} = \frac{1+2+3+...+n}{\log_3 x} = \frac{n(n+1)}{2\log_3 x}$$

Khi đó, ta có: $\dfrac{n(n+1)}{2\log_3 x} = \dfrac{210}{2\log_3 x} \Leftrightarrow n(n+1) = 420 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} n = 20 \\ n = -21 \end{array}\right.$.

Vì n nguyên dương nên $n = 20$.

Chọn (A).

Bài tập 46 Cho $f(x) = \dfrac{4^x}{4^x + 2}$. Tính tổng $S = f\left(\dfrac{1}{2017}\right) + f\left(\dfrac{2}{2017}\right) + ... + f\left(\dfrac{2015}{2017}\right) + f\left(\dfrac{2016}{2017}\right)$.

(A) $S = 2016$; **(B)** $S = 2017$; **(C)** $S = 1$; **(D)** $S = 1008$.

Giải:

Ta chứng minh cho với $a + b = 1$ thì $f(a) + f(b) = 1$.

Thật vậy:

$$f(a) + f(b) = \frac{4^a}{4^a + 2} + \frac{4^b}{4^b + 2} = \frac{4^a(4^b + 2) + 4^b(4^a + 2)}{(4^a + 2)(4^b + 2)} = \frac{2.4^{a+b} + 2.(4^a + 4^b)}{4^{a+b} + 2.(4^a + 4^b) + 4}$$

$$= \frac{2.4 + 2.(4^a + 4^b)}{4 + 2.(4^a + 4^b) + 4} = \frac{8 + 2(4^a + 4^b)}{8 + 2(4^a + 4^b)} = 1.$$

Áp dụng, ta có:

$$S = \left[f\left(\frac{1}{2017}\right) + f\left(\frac{2016}{2017}\right)\right] + \left[f\left(\frac{2}{2017}\right) + f\left(\frac{2015}{2017}\right)\right] + ... + \left[f\left(\frac{1009}{2017}\right) + f\left(\frac{1010}{2017}\right)\right]$$

$$S = 1 + 1 + ... + 1 = 1008.$$

Chọn (D).

Bài tập 47 *Bài toán lãi kép)* Một người gửi số tiền 1 triệu đồng vào ngân hàng với lãi suất 6%/ năm. Biết rằng nếu không rút tiền ra khỏi ngân hàng thì cứ sau mỗi năm, số tiền lãi sẽ được nhập vào vốn ban đầu (người ta gọi đó là lãi kép). Hỏi người đó lĩnh được bao nhiêu tiền sau n năm $(n \in \mathbb{N}^*)$, nếu trong khoảng thời gian này không rút tiền ra và lãi suất không thay đổi?

(A) $(1,06)^n$ triệu đồng;　　**(B)** 1 + 0,06n triệu đồng

(C) 1,06n triệu đồng;　　**(D)** 1 + 0,06(n - 1) triệu đồng.

Giải:

Giả sử $n \geq 2$. Gọi số vốn ban đầu là P, lãi suất là r. Ta có P = 1 (triệu đồng), r = 0,07.

+ Sau năm thứ nhất:

Tiền lãi là: $T_1 = Pr = 1.0,06 = 0,06$ (triệu đồng)

Số tiền được lĩnh (còn gọi là vốn tích lũy) là

$P_1 = P + T_1 = P + Pr = P(1+r) = 1,06$ (triệu đồng)

+ Sau năm thứ hai:

Tiền lãi là: $T_2 = P_1 r = 1,06.0,06 = 0,0636$ (triệu đồng)

Vốn tích lũy là: $P_2 = P_1 + T_2 = P_1 + P_1 r = P_1(1+r)$

$= P(1+r)^2 = (1,06)^2 = 1,1236$ (triệu đồng)

+ Tương tự, vốn tích lũy sau n năm là:

$P_n = P(1+r)^n = (1,06)^n$ (triệu đồng).

Vậy sau n năm người đó lĩnh được $(1,06)^n$ triệu đồng.

Chọn (A).

Bài tập 48 Một người tiết kiệm với lãi suất 8,4% và lãi hàng năm được nhập vào vốn. Hỏi sau bao nhiêu năm người đó thu được ít nhất gấp ba số tiền ban đầu?

(A) 12 năm;　　**(B)** 14 năm;　　**(C)** 13 năm;　　**(D)** 15 năm.

Giải:

Gọi số tiền gửi ban đầu là P. Sau n năm, số tiền thu được là:

$P_n = P(1+0,084)^n = P(1,084)^n$.

Để $P_n = 2P$ thì phải có $(1,084)^n = 3 \Leftrightarrow n = \log_{1,084} 3 \approx 13,62$

Vì n là số tự nhiên nên ta chọn n = 14.

Vậy muốn thu được ít nhất gấp ba số tiền ban đầu, người đó phải gửi 14 năm.

Chọn (B).

Bài tập 49 [Đề minh họa Quốc gia năm 2017]

Ông A vay ngắn hạn ngân hàng 100 triệu đồng, với lãi suất 12%/năm. Ông muốn hoàn nợ cho ngân hàng theo cách: Sau đúng một tháng kể từ ngày vay, -ông bắt đầu hoàn nợ; hai lần hoàn nợ liên tiếp cách nhau đúng một tháng, số tiền hoàn nợ mỗi lần là như nhau và trả hết tiền nợ sau đúng 3 tháng kể từ ngày vay. Hỏi theo cách đó, số tiền m mà ông A sẽ phải trả cho ngân hàng trong mỗi lần hoàn nợ là bao nhiêu? Biết rằng, lãi suất ngân hàng không thay đổi trong thời gian ông A hoàn nợ.

(A) $m=\frac{100.(1,01)^3}{3}$ (triệu đồng); **(B)** $m=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$ (triệu đồng);

(C) $m=\frac{100.1,03}{3}$ (triệu đồng); **(D)** $m=\frac{120.(1,12)^3}{(1,12)^3-1}$ (triệu đồng).

Giải:

Số tiền ông A còn nợ ngân hàng sau lần trả thứ nhất là:

$(100 + 100.0,01) - m = 100.1,01 - m$ (triệu đồng)

Số tiền ông A còn nợ ngân hàng sau lần trả thứ hai là:

$(100.1,01 - m).1,01 - m = 100.(1,01)^2-(1,01+1)m$ (triệu đồng)

Vì ông A đã hoàn cho ngân hàng toàn bộ số tiền nợ sau lần trả thứ ba nên ta có:

$$0=\left[100.(1,01)^2-(1,01+1)m\right].1,01-m=100.(1,01)^3-\left[(1,01)^2+1,01+1\right].m$$

$$\Rightarrow m=\frac{100.(1,01)^3}{(1,01)^2+1,01+1}=\frac{100.(1,01)^3.0,01}{(1,01-1)\left[(1,01)^2+1,01+1\right]}=\frac{(1,01)^3}{(1,01)^3-1}$$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Chủ đề 2:

HÀM SỐ MŨ VÀ HÀM SỐ LOGARIT

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Hàm số mũ và hàm số logarit

1.1. *Định nghĩa:* Giả sử a là một số dương và khác 1.

Hàn số dạng $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a (gọi tắt là hàm số mũ)

Hàm số dạng $y = \log_a x$ được gọi là hàm số logarit cơ số a (gọi tắt là hàm số logarit)

1.2. Một số giới hạn liên quan đến hàm số mũ và hàm số logarit

1.2.1. Các hàm số $y = a^x$ ***và*** $y = \log_a x$ ***liên tục tại mọi điểm mà nó xác định, tức là:***

$\forall x_0 \in \mathbb{R}, \lim\limits_{x \to x_0} a^x = a^{x_0}$,

$\forall x_0 \in \mathbb{R}_+^*, \lim\limits_{x \to x_0} \log_a x = \log_a x_0$.

1.2.2. Định lí: $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$,

$\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$.

1.3. Đạo hàm của hàm số mũ và hàm số logarit

1.3.1. Đạo hàm của hàm số mũ

Định lí: Hàm số $y = e^x$ có đạo hàm tại mọi x và $(e^x)' = e^x$.

Chú ý: Công thức đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số $e^u\ (u = u(x))$ là $(e^u)' = u'.e^u$.

Định lí: Hàm số $y = a^x\ (0 < a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi x và $(a^x)' = a^x \ln a$.

Chú ý: Đối với hàm hợp $y = a^{u(x)}$, ta có: $(a^u)' = a^u \ln a.u'$.

Ví dụ: Hàm số $y = 6^{x^2+2x+1}$ có đạo hàm là:

$y' = 6^{x^2+2x+1}.(x^2+2x+1)'\ln 6 = 6^{x^2+2x+1}(2x+2)\ln 6$.

1.3.2. Đạo hàm của hàm số logarit

Định lí: Hàm số $y = \log_a x\ (0 < a \neq 1)$ có đạo hàm tại mọi $x > 0$ và

$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$.

Đặc biệt: $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$.

Chú ý: Đối với hàm hợp $y = \log_a u(x)$, ta có: $(\log_a u)' = \dfrac{u'}{u \ln a}$.

Hàm số $y = \log_3 (2x+1)$ có đạo hàm là:

$$y' = \frac{(2x+1)'}{(2x+1)\ln 2} = \frac{2}{(2x+1)\ln 2}.$$

1.4. Sự biến thiên và đồ thị của hàm số mũ và hàm số lôgarit

1.4.1. Hàm số $y = a^x$

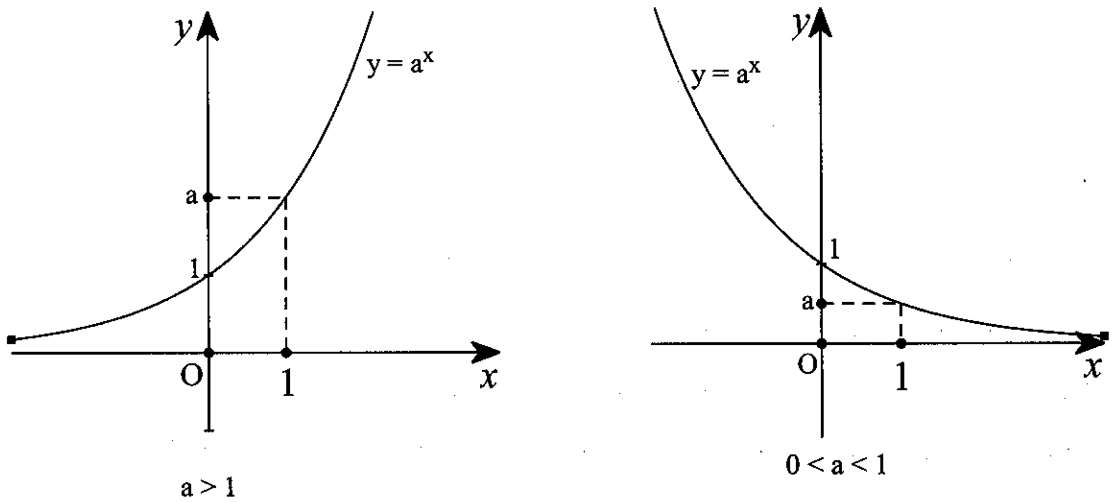
- Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là khoảng $(0;+\infty)$.
- Đồng biến trên $\mathbb{R}$ khi a > 1, nghịch biến trên $\mathbb{R}$ khi 0 < a < 1.
- Có đồ thị:

+ Đi qua điểm (0; 1).

+ Nằm ở phía trên trục hoành.

+ Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Đồ thị có một trong hai dạng nêu ở Hình 1.



Hình 1

1.4.2. Hàm số $y = \log_a x$

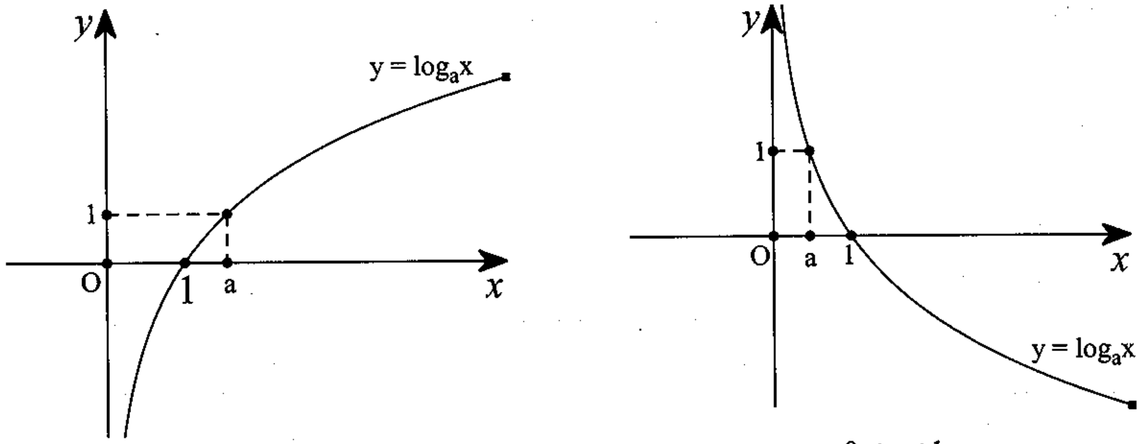
- Có tập xác định là khoảng $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.
- Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi a > 1, nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi 0 < a < 1.
- Có đồ thị

+ Đi qua điểm (1; 0).

+ Nằm ở bên phải trục tung.

+ Nhận trục tung là tiệm cận đứng.

Đồ thị có một trong hai dạng nêu ở Hình 2.



a > 1

0 < a < 1

Hình 2

2. Hàm số lũy thừa

1.1. ***Định nghĩa:***

Hàm số $y = x^{\alpha}$, với $\alpha \in \mathbb{R}$, được gọi là hàm số lũy thừa.

Các hàm số $y = x, y = x^2, y = \frac{1}{x^5}, y = x^{\frac{1}{4}}, y = x^{\sqrt{3}}, y = x^{e}, ...$ là những hàm số lũy thừa.

Chú ý:

- Tập xác định của hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}$ tùy thuộc vào giá trị của α. Cụ thể:

+ Với α nguyên dương, tập xác định là $\mathbb{R}$.

+ Với α nguyên âm hoặc bằng 0, tập xác định là $\mathbb{R} \setminus \{0\}$.

+ Với α không nguyên, tập xác định là $(0;+\infty)$.

+ Hàm số $y = x^{\frac{1}{n}}$ không đồng nhất với hàm số $y = \sqrt[n]{x}\ (n \in \mathbb{N}^*)$. Chẳng hạn, hàm số $y = \sqrt[3]{x}$ là hàm số căn bậc ba, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$, còn hàm số lũy thừa $y = x^{\frac{1}{3}}$ chỉ xác định với mọi $x > 0$.

- Hàm số lũy thừa liên tục trên tập xác định của nó.

1.2. Đạo hàm của hàm số lũy thừa

Hàm số lũy thừa $y = x^{\alpha}\ (\alpha \in \mathbb{R})$ có đạo hàm với mọi $x > 0$ và

$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$.

$$\left(x^{\frac{2}{3}}\right)' = \frac{2}{3}x^{\frac{2}{3}-1} = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}} = \frac{2}{3\sqrt[3]{x}}.$$

Chú ý: Công thức tính đạo hàm của hàm hợp đối với hàm số lũy thừa có dạng:

$(u^{\alpha})' = \alpha u^{\alpha-1}.u'$.

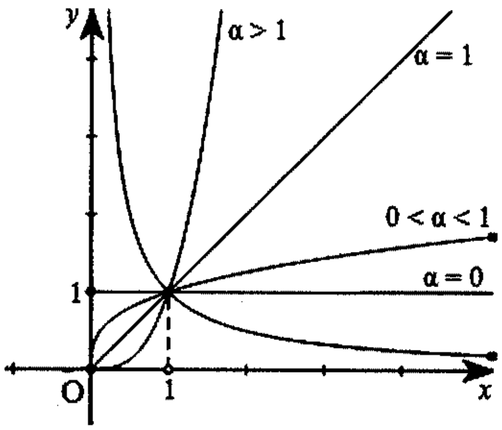
Ví dụ $\left[\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{4}}\right]'=\frac{3}{4}\left(x^2+x+1\right)^{\frac{3}{4}-1}\left(x^2+x+1\right)'=\frac{3}{4}\left(x^2+x+1\right)^{-\frac{1}{4}}.(2x+1)$

$=\frac{3(2x+1)}{4\sqrt[4]{x^2+x+1}}.$

1.3. Hàm số $y=x^{\alpha}$

Bảng tóm tắt các tính chất của hàm số lũy thừa $y=x^{\alpha}$ trên khoảng $(0;+\infty)$.

	$\alpha>0$	$\alpha<0$
Đạo hàm	$y'=\alpha x^{\alpha-1}$	
Chiều biến thiên	Hàm số luôn đồng biến	Hàm số luôn nghịch biến
Tiệm cận	Không có	Tiệm cận ngang là trục Ox, tiệm cận đứng là trục Oy
Đồ thị	Đồ thị luôn đi qua điểm (1; 1).	



II. BÀI TẬP

A. Khởi động

Cho mệnh đề: "$\log_a x<\log_a y \Leftrightarrow 0<x<y$". Với điều kiện nào của a thì mệnh đề đó là ĐÚNG?

(A) a bất kì; **(B)** $0<a\neq 1$; **(C)** $a>0$; **(D)** $a>1$.

Giải:

Mệnh đề đúng khi hàm số $f(x)=\log_a x$ là đồng biến $\Leftrightarrow a>1$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Cho mệnh đề: "$\log_a x < \log_a y \Leftrightarrow x > y > 0$". Với điều kiện nào của a thì mệnh đề đó là ĐÚNG?

(A) a bất kì; **(B)** $0 < a \neq 1$; **(C)** $0 < a < 1$; **(D)** $a > 1$.

Giải:

Mệnh đề đúng $\Rightarrow y = f(x)$ làm hàm số nghịch biến

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Trong các khẳng định dưới đây khẳng định nào là SAI về hàm số $y = a^x$?

(A) Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là khoảng $(0;+\infty)$.

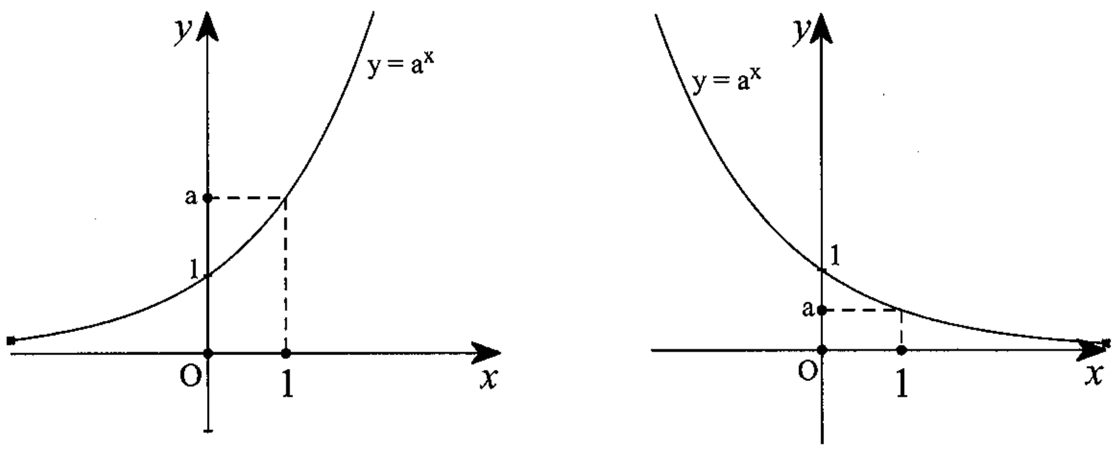
(B) Đồng biến khi $0 < a < 1$ và nghịch biến khi $a > 1$.

(C) Có đồ thị đi qua điểm (0; 1) và nằm ở phía trên trục hoành.

(D) Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Giải:

Đồ thị hàm số $y = a^x$ có một trong hai dạng sau:



$a > 1$ $\qquad\qquad$ $0 < a < 1$

Các khẳng định (A), (C), (D) là đúng, (B) là sai.

Chọn (B).

Trong các khẳng định sau khẳng định nào là SAI?

Hàm số $y = \log_a x$

(A) Có tập xác định là khoảng $(0;+\infty)$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.

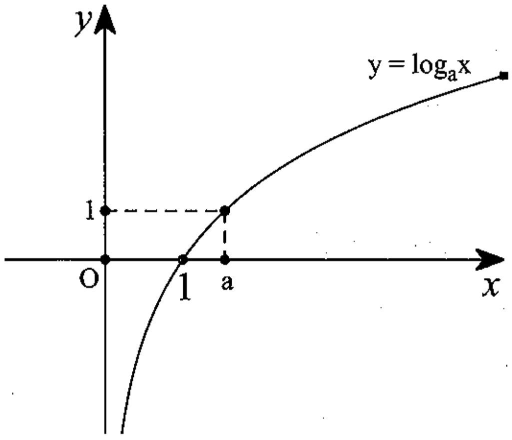
(B) Đồng biến trên $(0;+\infty)$ khi $a > 1$ và nghịch biến trên $(0;+\infty)$ khi $0 < a < 1$.

(C) Có đồ thị đi qua điểm (1; 0) và nằm ở bên phải trục tung.

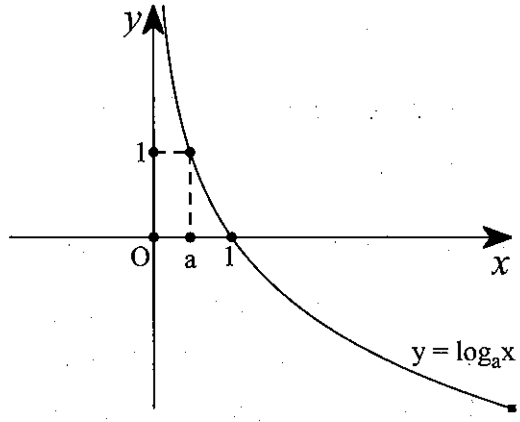
(D) Đồ thị không có tiệm cận đứng.

Giải:

Đồ thị hàm số $y = \log_a x$ có một trong hai dạng dưới đây:



$a > 1$



$0 < a < 1$

Các khẳng định (A), (B), (C) là đúng; (D) là sai, vì đồ thị có tiệm cận đứng là trục tung.

Chọn (D).

Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG về hàm số $y = \log_2 x$ trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(A) Có tập xác định là khoảng $(0;+\infty)$.

(B) Nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

(C) Có đồ thị đi qua điểm (1; 0).

(D) Nằm ở bên phải trục tung và nhận trục tung là tiệm cận đứng.

Giải:

Các khẳng định (a), (c), (d) đúng.

Khẳng định (b) sai, vì: $y' = \dfrac{1}{x\ln a} > 0\,\forall x \in (0;+\infty) \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

Vậy có tất cả 3 khẳng định đúng.

Chọn (C).

Có bao nhiêu khẳng định SAI về hàm số $y = \left(\dfrac{1}{3}\right)^x$ trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(A) Có tập xác định là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $\mathbb{R}$.

(B) Đồng biến trên $\mathbb{R}$.

(C) Có đồ thị đi qua điểm (0; 1) và nằm phía dưới trục hoành.

(D) Nhận trục hoành làm tiệm cận ngang.

Giải:

Hàm số $y=a^x$ có TXĐ là $\mathbb{R}$ và tập giá trị là $(0;+\infty) \Rightarrow$ (a) sai.

Ta có: $y'=\left(\frac{1}{3}\right)^x \ln\frac{1}{3}<0 \Rightarrow$ hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R} \Rightarrow$ (b) sai.

Đồ thị hàm số đi qua điểm (0; 1) và nằm phía dưới trên trục hoành, do $y>0 \forall x \Rightarrow$ (c) sai.

Khẳng định (d) đúng.

Vậy có tất cả 3 khẳng định sai.

Chọn (C).

Bài tập 7: Chọn khẳng định SAI trong các khẳng định sau:

(A) $\ln x>0 \Leftrightarrow x>1$; **(B)** $\log_3 x<0 \Leftrightarrow 0<x<1$;

(C) $\log_{\frac{1}{2}} a>\log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a>b>0$; **(D)** $\log_{\frac{1}{3}} a=\log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a=b>0$.

Giải:

Các khẳng định (A), (B), (D) đúng.

Khẳng định (C) sai, vì:

Vì $0<\frac{1}{2}<1 \Rightarrow \log_{\frac{1}{2}} a<\log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow 0<a<b$.

Chọn (C).

Bài tập 8: Cho hàm số $y=x^{\frac{\pi}{5}}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là SAI?

(A) Tập xác định là $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số luôn đồng biến với mọi x thuộc tập xác định.

(C) Hàm số luôn đi qua điểm (1; 1).

(D) Đồ thị của hàm số không có tiệm cận.

Giải:

Các khẳng định (B), (C), (D) đúng.

Khẳng định (A) sai, vì $\frac{\pi}{5}$ không nguyên nên TXĐ là khoảng $(0;+\infty)$.

Chọn (A).

Bài tập 9: Xét mệnh đề: "Với các số thực x, a, b, nếu 0 < a < b thì $a^x<b^x$". Với điều kiện nào sau đây của x thì mệnh đề đó là ĐÚNG?

(A) x bất kì; **(B)** $x>0$; **(C)** $x<0$; **(D)** $x=0$.

Giải:

Chọn (B).

Bài tập 10: Xét mệnh đề: "Với các số thực a, x, y, nếu x < y, thì $a^x < a^y$ ". Với điều kiện nào sau đây của a thì mệnh đề đó là ĐÚNG?

(A) a bất kì; **(B)** $a > 0$; **(C)** $a > 1$; **(D)** $a \geq 0$.

Giải:

Chọn (C).

Bài tập 11: Cho các số thực a, x, y với x < y. Điều kiện của a để $a^x > a^y$ là:

(A) $a < 0$; **(B)** a bất kì; **(C)** $a > 1$; **(D)** $0 < a < 1$.

Giải:

Chọn (D).

Bài tập 12: Khẳng định nào dưới đây là SAI?

(A) $\log_{\frac{1}{3}} a = \log_{\frac{1}{3}} b \Leftrightarrow a = b > 0$;

(C) $\log_{\frac{1}{2}} a > \log_{\frac{1}{2}} b \Leftrightarrow a > b > 0$;

(C) $\ln x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$;

(D) $\log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1$.

Giải:

Khẳng định sai là **(B)**.

Bài tập 13: Cho hàm số $y = -0,3^x$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là SAI?

(A) Hàm số có tập giá trị là $(-\infty.0)$.

(B) Hàm số luôn nghịch biến với $\forall x \in \mathbb{R}$.

(C) Đồ thị hàm số có tiệm cận ngang y = 0.

(D) Đồ thị hàm số luôn đi qua điểm (0; -1) và (1; 0,3).

Giải:

Các khẳng định (A), (C), (D) là đúng.

Khẳng định (B) sai, vì: $y' = -03^x \ln 0,3 > 0 \forall x \Rightarrow$ hàm số luôn đồng biến với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Chọn (B).

Bài tập 14: Cho hàm số $y = \log_2\left(x^2 + 1\right)$. Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là SAI?

(A) Tập xác định là $\mathbb{R}$.

(B) Hàm số luôn đồng biến.

(C) Đồ thị hàm số đi qua điểm A(0; 0).

(D) Hàm số đạt cực tiểu tại x = 0; y = 0.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \Rightarrow$ (A) đúng.

Ta có: $y' = \dfrac{2x}{\left(x^2+1\right)\ln 2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

Ta có: y' đổi dấu từ âm sang dương qua điểm x = 0 nên hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên $(-\infty;0)$; đạt cực tiểu tại (0; 0) $\Rightarrow$ (B) sai, (D) đúng.

Khi x = 0 thì y = 0 nên (D) đúng.

Chọn (B).

Bài tập 15: Cho các hàm số $y = \left(\sqrt{2}\right)^x, y = 3^{\frac{x}{4}}, y = x^{-6}, y = 4^{-x}$. Hỏi có tất cả bao nhiêu hàm số mũ?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

$$y = 3^{\frac{x}{4}} = \left(\sqrt[4]{3}\right)^x, y = 4^{-x} = \left(\frac{1}{4}\right)^x.$$

$\Rightarrow$ Các hàm số mũ là: $y = \left(\sqrt{2}\right)^x, y = 3^{\frac{x}{4}}, y = 4^{-x} \Rightarrow$ Có tất cả 3 hàm số mũ.

Chọn (C).

Nhắc lại: Hàm số $y = a^x$ được gọi là hàm số mũ cơ số a nếu $0 < a \neq 1$.

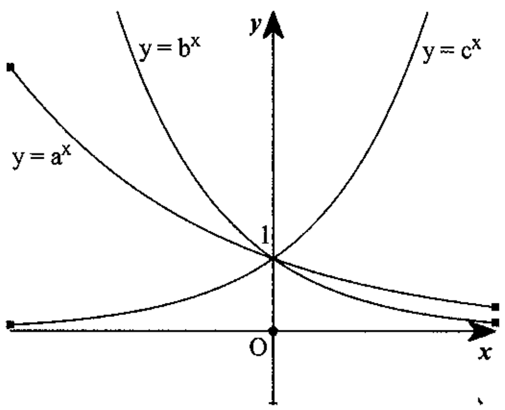
B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 16: Ở hình bên là đồ thị của ba hàm số

$y = a^x, y = b^x$ và $y = c^x$ (trong đó a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c.

(A) $a > b > c$; **(B)** $a > c > b$;

(C) $c > b > a$; **(D)** $c > a > b$.



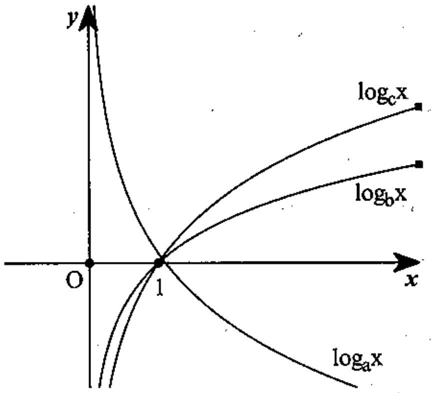
Giải:

Nhìn vào đồ thị ta thấy các hàm số $y = a^x$ và $y = b^x$ là các hàm nghịch biến, $y = c^x$ là hàm đồng biến $\Rightarrow b < a < 1 < c$

Chọn (D).

Bài tập [illegible] Ở hình bên là đồ thị của ba hàm số

$y = a^x, y = b^x$ và $y = c^x$ (trong đó a, b, c là ba số dương khác 1 cho trước) được vẽ trong cùng một mặt phẳng tọa độ. Dựa vào đồ thị và các tính chất của lũy thừa, hãy so sánh ba số a, b và c.



(A) $b > c > a$; **(B)** $b > a > c$;

(C) $c > b > a$; **(D)** $c > a > b$.

Giải:

Nhìn vào đồ thị ta thấy các hàm số $y = \log_b x$ và $y = \log_c x$ là các hàm số đồng biến, hàm số $y = \log_a x$ nghịch biến $\Rightarrow b > c > 1 > a$

Chọn (A).

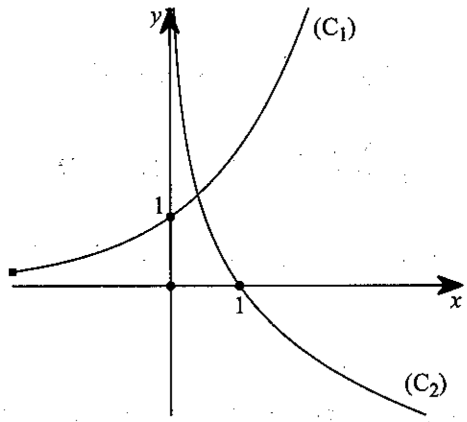
Bài tập [illegible] Cho hai đồ thị $(C_1): y = a^x, (C_2): y = \log_b x$ có đồ thị như hình vẽ. Nhận xét nào dưới đây là ĐÚNG?

$a > 1$ và $b > 1$;

$a > 1$ và $0 < b < 1$;

$0 < a < 1$ và $0 < b < 1$;

$0 < a < 1$ và $b > 1$.



Giải:

Nhìn vào đồ thị (C_1) ta có $y = a^x$ là hàm số đồng biến $\Rightarrow a > 1$.

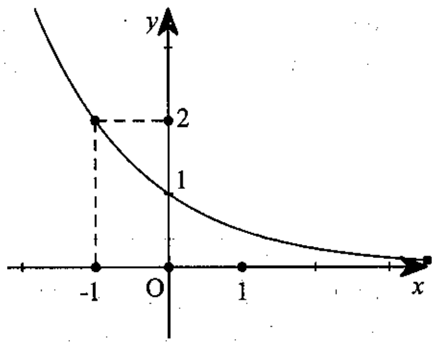
Nhìn vào đồ thị (C_2) ta có $y = \log_b x$ là hàm số nghịch biến $\Rightarrow 0 < b < 1$.

Chọn (B).

Bài tập [illegible] Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

(A) $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$; **(B)** $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$;

(C) $y = 2^x$; **(D)** $y = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^x$.



Giải:

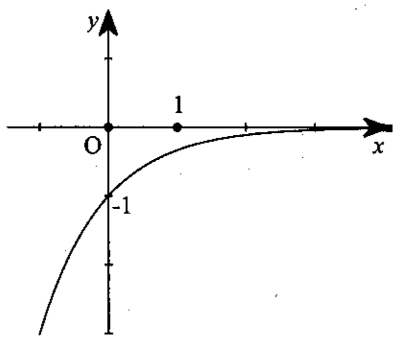
Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số nghịch biến trên TXĐ và đi qua điểm (-1; 2)

$\Rightarrow$ Hàm số đó là $y = \left(\frac{1}{2}\right)^x \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

(A) $y = 3^x$; **(B)** $y = \left(\frac{1}{3}\right)^x$;

(C) $y = -3^x$; **(D)** $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$.



Giải:

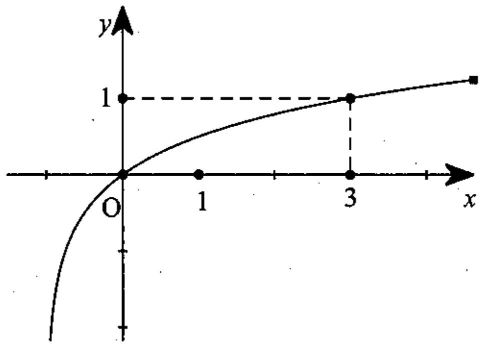
Nhìn vào đồ thị ta thấy hàm số đồng biến trên TXĐ và $y < 0$ với mọi x nên hàm số đó là $y = -\left(\frac{1}{3}\right)^x$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Đồ thị hình bên là của hàm số nào?

(A) $y = \log_3 x + 1$; **(B)** $y = \log_3(x+1)$;

(C) $y = \log_4(x+1)$; **(D)** $y = \log_4 x + 1$.



Giải:

Nhìn vào đồ thị ta thấy đồ thị hàm số đi qua gốc tọa độ O(0; 0) và A(3; 1) $\Rightarrow$ Hàm số đó là $y = \log_4(x+1)$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Có bao nhiêu hàm số nghịch biến trong các hàm số sau đây?

$$y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x, y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^x, y = \left(\sqrt{2}\right)^x, y = \left(\frac{3}{4}\right)^x.$$

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Vì $0 < \frac{\pi}{4} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{\pi}{4}\right)^x$ nghịch biến.

Vì $0 < \frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{2}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}\right)^x$ nghịch biến.

Vì $\sqrt{2} > 1$ nên hàm số $y = \left(\sqrt{2}\right)^x$ đồng biến.

Vì $0 < \frac{3}{4} < 1$ nên hàm số $y = \left(\frac{3}{4}\right)^x$ nghịch biến.

Vậy có tất cả 3 hàm số nghịch biến.

Chọn (C).

Nhắc lại: Hàm số $y = a^x$ đồng biến khi $a > 1$, nghịch biến khi $0 < a < 1$.

Bài tập 23 Hàm số nào sau đây đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$?

(A) $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}x$; **(B)** $y=\log_{\frac{e}{5}}x$; **(C)** $y=\log_{\frac{e}{3}}x$; **(D)** $y=\log_{\frac{\pi}{6}}x$.

Giải:

Vì $\frac{\sqrt{3}}{2}>1$ nên hàm số $y=\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}x$ đồng biến trên $(0;+\infty)$.

Vì $0<\frac{e}{5},\frac{e}{3},\frac{\pi}{6}<1$ nên các hàm số $y=\log_{\frac{e}{5}}x$, $y=\log_{\frac{e}{3}}x$, $y=\log_{\frac{\pi}{6}}x$ nghịch biến trên $(0;+\infty)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 24 Cho các hàm số $y=\log_{\frac{3}{e}}x, y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x, y=\log_a x$ với $a=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}$. Có bao nhiêu hàm số đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ trong các hàm số đã cho?

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Vì $\frac{3}{e}>1$ nên hàm số $y=\log_{\frac{3}{e}}x$ đồng biến.

Vì $0<\frac{\sqrt{2}}{2}<1$ nên hàm số $y=\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}x$ nghịch biến.

Vì $a=\frac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\sqrt{6}+\sqrt{5}>1$ nên hàm số $y=\log_a x$ đồng biến.

Vậy có tất cả 2 hàm số đồng biến.

Chọn (B).

Nhắc lại: Hàm số $y=\log_a x$ đồng biến khi $a>1$, nghịch biến khi $0<a<1$.

Bài tập 25 Tập xác định của hàm số $y=\log_3(4-2x)$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $(2;+\infty)$; **(C)** $(-\infty;2)$; **(D)** $(-\infty;2]$.

Giải:

Hàm số xác định khi $4-2x>0 \Leftrightarrow x<2 \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 26 Tập xác định của hàm số $y=\log\frac{x-1}{2-x}$ là:

(A) $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$; **(B)** $(1;2)$; **(C)** $\mathbb{R}\setminus\{2\}$; **(D)** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$.

Giải:

Hàm số xác định khi $\frac{x-1}{2-x}>0 \Leftrightarrow 1<x<2 \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 27 Tập xác định của hàm số $y=\log_3(-x^2-3x+4)$ là:

(A) (-4; 1); **(B)** $(-\infty;-4)\cup(1;+\infty)$; **(C)** $\mathbb{R}$; **(D)** $[1;+\infty)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $-x^2-3x+4>0 \Leftrightarrow -4<x<1$.

Chọn (B).

Bài tập 28. Tìm tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\log_3(x+1)}{x+1}$.

(A) $(-1;+\infty)$; **(B)** $[-1;+\infty)$; **(C)** $\mathbb{R}\setminus\{-1\}$; **(D)** $\mathbb{R}$.

Giải:

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x+1>0 \\ x+1\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x>-1$.

$\Rightarrow$ TXĐ của hàm số là $D=(-1;+\infty)$.

Chọn (A).

Bài tập 29. Tập xác định của hàm số $y=\ln|x-1|$ là:

(A) $D=\mathbb{R}$; **(B)** $D=(1;+\infty)$; **(C)** $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$; **(D)** $D=(0;+\infty)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $|x-1|>0 \Leftrightarrow x-1\neq 0 \Leftrightarrow x\neq 1$

Vậy TXĐ của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(1;+\infty)$.

Chọn (C).

Bài tập 30. Hàm số $y=\log_x 3$ xác định khi:

(A) $0<x<1$; **(B)** $x>1$; **(C)** $x>0$; **(D)** $0<x\neq 1$.

Giải:

Hàm số xác định khi $0<x\neq 1 \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 31. Trong các hàm số dưới đây, hàm số nào KHÔNG CÓ cùng tập xác định với hàm số $y=\log_3 x$?

(A) $y=\log x$; **(B)** $y=\log_x 3$; **(C)** $y=\ln\sqrt{x}$; **(D)** $y=\log_2 x$.

Giải:

TXĐ của hàm số $y=\log_3 x$ là $(0;+\infty)$.

TXĐ của hàm số $y=\log x$ là $(0;+\infty)$.

TXĐ của hàm số $y=\log_x 3$ là $(0;1)\cup(1;+\infty)$.

TXĐ của hàm số $y=\ln\sqrt{x}$ là $(0;+\infty)$.

TXĐ của hàm số $y=\log_2 x$ là $(0;+\infty)$.

Chọn (B).

Bài tập 32 Hàm số $y = \sqrt[3]{x^2 - 4x + 3}$ có tập xác định là:

(A) $\mathbb{R} \setminus \{1;3\}$; **(B)** $(-\infty;1) \cup (3;+\infty)$; **(C)** $\mathbb{R}$; **(D)** $(2;+\infty)$.

Giải:

Vì hàm số y xác định với mọi x thuộc $\mathbb{R}$ nên **chọn (C).**

Bài tập 33 Tập xác định của hàm số $y = 2(x-1)^{-7}$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; **(C)** $(-\infty;1)$; **(D)** $(1;+\infty)$.

Giải:

Ta có: $y = \dfrac{2}{(x-1)^7}$ xác định khi $(x-1)^7 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq 1$.

Vậy tập xác định của hàm số là $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

$\Rightarrow$ Chọn (B).

Chú ý: Hàm số $y = x^\alpha$ với α nguyên âm, xác định khi $x \neq 0$; với α nguyên dương, xác định với mọi $x \in \mathbb{R}$.

Bài tập 34 Tập xác định của hàm số $y = (2x^2 - 8)^{-4}$ là:

(A) $(-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$; **(B)** $[-2;2]$; **(C)** $\mathbb{R} \setminus \{-2;2\}$; **(D)** $\mathbb{R}$.

Giải:

Ta có: $y = \dfrac{1}{(2x^2-8)^4}$ xác định khi $(2x^2-8)^4 \neq 0 \Leftrightarrow x^2 \neq 4 \Leftrightarrow x \neq \pm 2$.

Chọn (C).

Bài tập 35 Tập xác định của hàm số $y = (x^2 - 3x + 2)^{\frac{1}{3}}$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $(-\infty;1) \cup (2;+\infty)$; **(C)** $(1;2)$; **(D)** $(2;+\infty)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 2 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ Chọn (B).

Chú ý: Hàm số $y = x^\alpha$ với α không nguyên xác định khi $x > 0$. Vì thế hàm số đã cho xác định khi $x^2 - 3x + 2 > 0$.

Bài tập 36 Tập xác định của hàm số $y = (1 - 4x^2)^{-\frac{1}{8}}$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $\mathbb{R} \setminus \left\{\pm\dfrac{1}{2}\right\}$; **(C)** $\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right)$; **(D)** $\left[-\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{2}\right]$.

Giải:

Hàm số xác định khi $1 - 4x^2 > 0 \Leftrightarrow -\dfrac{1}{2} < x < \dfrac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ Chọn (C).

Bài tập 37 Tập xác định của hàm số $y=\left(x^2-3x+2\right)^{\sqrt{3}}$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$; **(C)** $\mathbb{R}\setminus\{1;2\}$; **(D)** $(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $x^2-3x+2>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>2 \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ TXĐ của hàm số là $D=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 38 Tập xác định của hàm số $y=\log_2\left(2^{x-1}-4\right)$ là:

(A) $[1;+\infty)$; **(B)** $[2;+\infty)$; **(C)** $[3;+\infty)$; **(D)** $(3;+\infty)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $2^{x-1}-4>0 \Leftrightarrow 2^{x-1}>4 \Leftrightarrow 2^{x-1}>2^2 \Leftrightarrow x-1>2 \Leftrightarrow x>3$.

Vậy TXĐ là $D=(3;+\infty)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 39 Tập xác định của hàm số $y=\log_5\left(36-x^2\right)$ là:

(A) $(-\infty;-6)\cup(6;+\infty)$; **(B)** $(6;+\infty)$; **(C)** $(-6;6)$; **(D)** $[-6;6)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $36-x^2>0 \Leftrightarrow x^2<36 \Leftrightarrow -6<x<6$.

Vậy TXĐ của hàm số là (-6; 6).

Chọn (C).

Bài tập 40 Tập xác định của hàm số $y=\log\sqrt{x^2+2x-15}$ là:

(A) (-3; 5); **(B)** $[-3;5]$; **(C)** $(-\infty;-5]\cup[3;+\infty)$; **(D)** $(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$.

Giải:

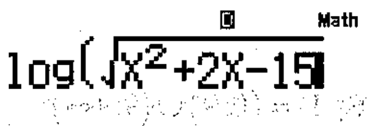
Hàm số xác định khi $\sqrt{x^2+2x-15}>0 \Leftrightarrow x^2+2x-15>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-5 \end{array}\right.$.

Vậy tập xác định $D=(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$.

Chọn (D).

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Sử dụng máy tính CASIO nhập $y=\log\sqrt{x^2+2x-15}$



Ta CALC với các giá trị biên

```
Math ERROR

[AC]  :Cancel
[◄][►]:Goto
```

CALC với giá trị $= -3$ (MATH ERROR) loại đáp án B

CALC với giá trị -5 (MATH ERROR) loại C.

Còn 2 đáp án A và C ta tiếp tục CALC với các giá trị $x = -2; x = 10$ từ đó suy ra đáp án D đúng.

Bài tập 41 Tập xác định của hàm số $y = \ln\frac{3x-1}{\sqrt{x-1}}$ là:

(A) $\left(\frac{1}{3};+\infty\right)$; **(B)** $(1;+\infty)$; **(C)** $\left(\frac{1}{3};1\right)$; **(D)** $\left[\frac{1}{3};1\right]$.

Giải:

Hàm số xác định khi $\frac{3x-1}{\sqrt{x-1}} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0 \\ 3x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Vậy TXĐ của hàm số là $D = (1;+\infty)$.

Chọn (B).

Bài tập 42 Tập xác định của hàm số $y = \log_3\left(3^{x-1} - 9\right)$ là:

(A) $D = [3;+\infty)$; **(B)** $(-\infty;2]$; **(C)** $D = (3;+\infty)$; **(D)** $D = [2;+\infty)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $3^{x-1} - 9 > 0 \Leftrightarrow 3^{x-1} > 9 \Leftrightarrow 3^{x-1} > 3^2 \Leftrightarrow x-1 > 2 \Leftrightarrow x > 3.$

Vậy TXĐ của hàm số là $D = (3;+\infty)$.

Chọn (C).

Bài tập 43 Tập xác định của hàm số $y = \log_{x+1}(3-x)$ là:

(A) $D = (-1;3)$; **(B)** $[-1;3]$; **(C)** $D = (0;3)$; **(D)** $D = (-1;0)\cup(0;3)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $\begin{cases} 3-x>0 \\ 0 < x+1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<3 \\ x>-1. \\ x \neq 0 \end{cases}$

Vậy TXĐ của hàm số là $D = (-1;0)\cup(0;3)$.

Chọn (D).

Bài tập 44 Tập xác định của hàm số $y = \frac{3}{\log_3 x - 2}$ là:

(A) $D = (0;+\infty)$; **(B)** $D = (0;9)\cup(9;+\infty)$;

(C) $D = (9;+\infty)$; **(D)** $D = (-\infty;9)\cup(9;+\infty)$.

Giải:

Hàm số xác định khi $\begin{cases} x>0 \\ \log_3 x-2\neq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>0 \\ x\neq 3^2=9\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\neq 9.$

Vậy TXĐ của hàm số là $D=(0;9)\cup(9;+\infty)$.

Chọn (B).

Bài tập 45 Tập các số x thỏa mãn $\left(\frac{3}{4}\right)^{4x}\leq\left(\frac{4}{3}\right)^{2-x}$ là:

(A) $\left[-\frac{2}{3};+\infty\right)$; **(B)** $\left(-\infty;-\frac{2}{3}\right]$; **(C)** $\left[\frac{2}{5};+\infty\right)$; **(D)** $\left(-\infty;\frac{2}{5}\right]$.

Giải:

Ta có: $\left(\frac{3}{4}\right)^{4x}\leq\left(\frac{4}{3}\right)^{2-x}\Leftrightarrow\left(\frac{3}{4}\right)^{4x}\leq\left(\frac{3}{4}\right)^{x-2}\Leftrightarrow 4x\geq x-2\Leftrightarrow 3x\geq -2\Leftrightarrow x\geq -\frac{2}{3}$

Chọn (A).

Bài tập 46 Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y=3^{|x|}$ trong đoạn [-3; 3] lần lượt là:

(A) 27 và 1; **(B)** 27 và $\frac{1}{27}$; **(C)** 27 và $-\frac{1}{27}$; **(D)** 1 và $\frac{1}{27}$.

Giải:

Vì $x\in[-3;3]$ thì $-x\in[-3;3]$ và $y(x)=3^{|x|}=3^{|-x|}=y(-x)\Rightarrow$ hàm số là chẵn $\Rightarrow$ Đồ thị của hàm số nhận Oy làm trục đối xứng.

Xét $g(x)=3^x$ trên [0; 3].

Ta có: $g'(x)=3^x\ln 3>0\,\forall x\in[0;3]\Rightarrow$ g(x) đồng biến trên [0; 3].

Ta có: g(0) = 1; g(3) = 27.

$\Rightarrow \underset{[0;3]}{\text{Max}}\, g(x)=27$, $\underset{[0;3]}{\text{Min}}\, g(x)=1$.

$\Rightarrow \underset{[-3;3]}{\text{Max}}\, y=27$; $\underset{[-3;3]}{\text{Min}}\, y=1$.

Chọn (A).

Bài tập 47 Đạo hàm của hàm số $y=e^{x^2+2x}$ là:

(A) e^{x^2+2x}; **(B)** $(2x+2)e^{x^2+2x}$; **(C)** $\frac{e^{x^2+2x}}{2x+2}$; **(D)** $2x+2+e^{x^2+2x}$.

Giải:

$y'=(x^2+2x)'e^{x^2+2x}=(2x+2)e^{x^2+2x}$.

Chọn (B).

Bài tập 48 [Đề minh họa Quốc gia 2017]

Tính đạo hàm của hàm số $y = 13^x$.

(A) $y' = x.13^{x-1}$; **(B)** $y' = 13^x.\ln 13$; **(C)** $y' = 13^x$; **(D)** $y' = \dfrac{13^x}{\ln 13}$.

Giải:

Ta có: $y' = \left(13^x\right)' = 13^x \ln 13 \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 49 [Đề minh họa Quốc gia 2017]

Tính đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{x+1}{4^x}$.

(A) $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$; **(B)** $y' = \dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{2^{2x}}$;

(C) $y' = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$; **(D)** $y' = \dfrac{1+2(x+1)\ln 2}{4^{x^2}}$.

Giải:

Ta có: $y' = \left(\dfrac{x+1}{4^x}\right)' = \dfrac{(x+1)'.4^x - (4^x)'.(x+1)}{\left(4^x\right)^2} = \dfrac{4^x - 4^x \ln 4.(x+1)}{4^{2x}} = \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{4^x}$

$= \dfrac{1-2(x+1)\ln 2}{2^{2x}} \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 50 Đạo hàm của hàm số $y = \log\left(x^2+2x+3\right)$ là:

(A) $\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}$; **(B)** $\dfrac{1}{x^2+2x+3}$; **(C)** $\dfrac{2x+2}{x^2+2x+3}\ln 10$; **(D)** $\dfrac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)\ln 10}$.

Giải:

$$y' = \dfrac{\left(x^2+2x+3\right)'}{\left(x^2+2x+3\right)\ln 10} = \dfrac{2x+2}{\left(x^2+2x+3\right)\ln 10}.$$

Chọn (D).

Bài tập 51 Đạo hàm của hàm số $y = \dfrac{\log_2 x}{x}$ là:

(A) $\dfrac{1-\ln x}{x^2 \ln 2}$; **(B)** $\dfrac{\ln 2 - \log_2 x}{x^2}$; **(C)** $\dfrac{1-\log_2 x}{x^2}$; **(D)** $\dfrac{1-\ln x}{x^2}$.

Giải:

$$y' = \dfrac{(\log_2 x)'x - x'.\log_2 x}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{x\ln 2}.x - \log_2 x}{x^2} = \dfrac{\dfrac{1}{\ln 2} - \log_2 x}{x^2} = \dfrac{1-\ln 2\log_2 x}{x^2 \ln 2} = \dfrac{1-\ln x}{x^2 \ln 2}.$$

Chọn (A).

Đạo hàm của hàm số $y=\ln\frac{1}{x+1}$ là:

(A) $\frac{1}{x+1}$; (B) $x+1$; (C) $-\frac{1}{x}$; (D) $-\frac{1}{x+1}$.

Giải:

Ta có: $y'=\frac{\left(\frac{1}{x+1}\right)'}{\frac{1}{x+1}}=\frac{-\frac{1}{(x+1)^2}}{\frac{1}{x+1}}=-\frac{1}{x+1}$.

Chọn (D).

Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x+1}.\ln x$ là:

(A) $\frac{x+2\sqrt{x+1}}{2x\sqrt{x+1}}$; (B) $\frac{x\ln x+2(x+1)}{2x\sqrt{x+1}}$; (C) $\frac{1}{2x\sqrt{x+1}}$; (D) $\frac{x+\sqrt{x+1}}{x\sqrt{x+1}}$.

Giải:

Ta có: $y'=\left(\sqrt{x+1}\right)'.\ln x+(\ln x)'.\sqrt{x+1}=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}.\ln x+\frac{1}{x}.\sqrt{x+1}=\frac{x\ln x+2(x+1)}{2x\sqrt{x+1}}$.

Chọn (B).

Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt{x^2+1}\ln x^4$ là:

(A) $\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{4}{x}$; (B) $\frac{4}{\sqrt{x^2+1}}$;

(C) $\frac{4x\ln|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{4\sqrt{x^2+1}}{x}$; (D) $\frac{4x\ln x}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{4\sqrt{x^2+1}}{x}$.

Giải:

Ta có:

$$y'=\left(\sqrt{x^2+1}\right)'.\ln x^4+\left(\ln x^4\right)'.\sqrt{x^2+1}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}.4\ln|x|+\frac{4x^3}{x^4}.\sqrt{x^2+1}=\frac{4x\ln|x|}{\sqrt{x^2+1}}+\frac{4\sqrt{x^2+1}}{x}.$$

Chọn (C).

Cho hàm số $y=\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+2x-3\right)$. Tính y' được kết quả là:

(A) $\frac{1}{\left(x^2+2x-3\right)^{\ln\sqrt{2}}}$; (B) $\frac{\ln\sqrt{2}}{x^2+2x-3}$;

(C) $\frac{4x+4}{\left(x^2+2x-3\right)\ln 2}$; (D) $\frac{2x+2}{\left(x^2+2x-3\right)\ln 2}$.

Giải:

$$y'=\frac{\left(x^2+2x-3\right)'}{\left(x^2+2x-3\right)\ln\sqrt{2}}=\frac{2x+2}{\left(x^2+2x-3\right).\frac{1}{2}\ln 2}=\frac{4x+4}{\left(x^2+2x-3\right)\ln 2}.$$

Chọn (C).

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Ta tính $\frac{d}{dx}\left(\log_{\sqrt{2}}\left(x^2+2x-3\right)\right)\Big|_{x=100}=0,0571$

Từ 4 đáp án bài toán đưa ra ta có với đáp án C $\frac{4x+4}{\left(x^2+2x-3\right)\ln 2}=f'(x)\Rightarrow f'(100)=0,0571$

Bài tập 56 Tính đạo hàm của hàm số $y=x^2\sqrt{e^{3x}+1}$.

(A) $\frac{4x\left(e^{3x}+1\right)+3x^2e^{3x}}{2\sqrt{e^{3x}+1}}$; **(B)** $\frac{4x\sqrt{e^{3x}+1}+3e^{3x}}{2\sqrt{e^{3x}+1}}$;

(C) $\frac{3xe^{3x}}{\sqrt{e^{3x}+1}}$; **(D)** $\frac{x}{\sqrt{e^{3x}+1}}$.

Giải:

Ta có: $y'=\left(x^2\right)'.\sqrt{e^{3x}+1}+x^2.\left(\sqrt{e^{3x}+1}\right)'=2x\sqrt{e^{3x}+1}+x^2.\frac{\left(e^{3x}+1\right)'}{2\sqrt{e^{3x}+1}}$

$=2x\sqrt{e^{3x}+1}+x^2.\frac{3}{2}.\frac{e^{3x}}{\sqrt{e^{3x}+1}}=\frac{4x\left(e^{3x}+1\right)+3x^2e^{3x}}{2\sqrt{e^{3x}+1}}$.

Chọn (A).

Bài tập 57 Đạo hàm của hàm số $y=x^x$ là:

(A) $y'=x\ln x$; **(B)** $y'=x^x\left(\ln x+1\right)$;

(C) $y'=x^{x-1}\left(x+\ln x\right)$; **(D)** $y'=x^{x-1}\left(x+\ln x\right)$.

Giải:

Ta có: $\ln y=x\ln x\Rightarrow\frac{y'}{y}=\ln x+1\Leftrightarrow y'=\left(\ln x+1\right)y=\left(\ln x+1\right)x^x$.

Chọn (B).

Bài tập 58 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 0.

(a) Đạo hàm của hàm số $y=\left(3x+1\right)^e$ là $y'=3e.\left(3x+1\right)^{e-1}$.

(b) Đạo hàm của hàm số $y=\left(3x+1\right)^e$ là $y'=e.\left(3x+1\right)^{e-1}$.

(c) Đạo hàm của hàm số $y=\sqrt[3]{\ln^5 6x}$ là $y'=\frac{5}{18}.\frac{\sqrt[3]{\ln^2 6x}}{x}$.

Giải:

+ Xét khẳng định (a) và (b):

Ta có: $y' = e\left(3x+1\right)^{e-1}.\left(3x-1\right)' = 3e\left(3x+1\right)^{e-1} \Rightarrow$ (a) đúng, (b) sai.

+ Xét khẳng định (c):

Ta có: $y' = \frac{5}{3}\left(\ln 6x\right)^{\frac{5}{3}-1}.\frac{(6x)'}{6x} = \frac{5}{3}\left(\ln 6x\right)^{\frac{2}{3}}.\frac{1}{x} \Rightarrow$ (c) đúng.

Vậy có tất cả 2 khẳng định đúng.

Chọn (B).

Bài tập 59 Trong các hàm số $f\left(x\right) = \ln\frac{1}{\sin x}, g\left(x\right) = \ln\frac{1+\sin x}{\cos x}, h\left(x\right) = \ln\frac{1}{\cos x}$, hàm số nào có đạo hàm là $\frac{1}{\cos x}$?

(A) f(x); **(B)** g(x); **(C)** h(x); **(D)** f(x) và g(x).

Giải:

Ta có: $f'\ x = \left(\ln\frac{1}{\sin x}\right)' = \frac{\left(\frac{1}{\sin x}\right)'}{\frac{1}{\sin x}} = -\cot x \Rightarrow$ (A) không đúng, (D) không đúng.

$g'\ x = \frac{\left(\frac{1+\sin x}{\cos x}\right)'}{\frac{1+\sin x}{\cos x}} = \frac{1}{1-\sin x}.\frac{\cos x}{1+\sin x} = \frac{\cos x}{1-\sin^2 x} = \frac{\cos x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos x} \Rightarrow$ (B) đúng.

$h'\left(x\right) = \frac{\left(\frac{1}{\cos x}\right)'}{\frac{1}{\cos x}} = \tan x \Rightarrow$ (C) không đúng.

Chọn (B).

Bài tập 60 Số điểm cực trị của hàm số $y = \frac{e^x}{x-1}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

Ta có: $y' = \frac{e^x\left(x-2\right)}{\left(x-1\right)^2}$.

$y' = 0 \Leftrightarrow x = 2$ và qua điểm $x = 2$ thì y' đổi dấu từ - sang +. Vậy hàm số đạt cực tiểu tại $x = 2$.

Chọn (B).

Bài tập 61 Tọa độ giao điểm của hai đồ thị hàm số $y = 2^{-x} + 4$ và $y = 12$ là:

(A) (3; 12); **(B)** (-3; 12); **(C)** (4; 12); **(D)** (-4; 12).

Giải:

Phương trình hoành độ giao điểm là: $2^{-x} + 4 = 12 \Leftrightarrow 2^{-x} = 8 = 2^{-3} \Leftrightarrow x = -3$

Vậy tọa độ giao điểm là (-3; 12). **Chọn (B).**

C. Tăng tốc

Bài tập 62 Cho hàm số $f(x) = \ln(6x - x^2)$. Chọn khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định sau:

(A) f'(3) = 1; **(B)** f'(3) = 0; **(C)** f'(8) = 0,625; **(D)** $f'(-1) = -\frac{8}{7}$.

Giải:

Điều kiện: $6x - x^2 > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 6$.

Vì x = 8 và x = -1 không thỏa mãn điều kiện nên loại phương án (C) và (D).

Ta có: $f'(x) = \frac{6-2x}{6x - x^2} \Rightarrow f'(3) = 0 \Rightarrow$ (A) sai và (C) đúng.

Chọn (B).

Lưu ý:

1. Nếu không chú ý đến điều kiện để hàm số có nghĩa mà trực tiếp tính f'(3), f'(8) và f'(-1) thì ta sẽ có:

f'(3) = 0, f'(8) = 0,625, $f'(-1) = -\frac{8}{7}$. Lúc này sẽ gây hiểu nhầm cả 3 phương án (B), (C) và (D) đều đúng. Vì vậy khi tính đạo hàm của hàm số thì ta phải tính trên tập xác định của hàm số.

2. Có thể sử dụng Casio như sau:

Bấm $\frac{d}{dx}\left(\ln\left(6x - x^2\right)\right)\Big|_{x=X}$ và CALC với $x = 1; 3; 8; -1$. **Chọn B.**

[illegible] Với điều kiện nào của a thì $(a-1)^{-\frac{1}{2}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}}$?

(A) a > 2; **(B)** a > 1; **(C)** 1 < a < 2; **(D)** 0 < a < 1.

Giải:

Xét hàm số đặc trưng $y = (a-1)^x$.

Vì $-\frac{1}{2} < -\frac{1}{3}$ và $(a-1)^{-\frac{1}{2}} < (a-1)^{-\frac{1}{3}} \Rightarrow$ Hàm số đặc trưng $y = (a-1)^x$ đồng biến $\Rightarrow a - 1 > 1 \Leftrightarrow a > 2 \Rightarrow$ **Chọn (A).**

[illegible] Hàm số nào sau đây có tập xác định là $\left[-\frac{4}{9}; 1\right]$?

(A) $y = \ln\left(4 + 5x - 9x^2\right)$; **(B)** $y = \frac{1}{4 + 5x - 9x^2}$;

(C) $y = \frac{1}{\sqrt{4 + 5x - 9x^2}}$; **(D)** $y = \sqrt{4 + 5x - 9x^2}$.

Giải:

Để hàm số $y=\ln\left(4+5x-9x^2\right)$ thì $4+5x-9x^2>0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{9}<x<1$.

Để hàm số $y=\dfrac{1}{4+5x-9x^2}$ xác định thì $4+5x-9x^2\neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 1 \\ x\neq -\dfrac{4}{9} \end{cases}$.

Để hàm số $y=\dfrac{1}{\sqrt{4+5x-9x^2}}$ xác định thì $4+5x-9x^2>0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{9}<x<1$.

Để hàm số $y=\sqrt{4+5x-9x^2}$ xác định thì $4+5x-9x^2\geq 0 \Leftrightarrow -\dfrac{4}{9}\leq x\leq 1$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{\ln\left(x^2-9\right)}{x-4+\sqrt{x^2-8x+16}}$ là:

(A) $(-\infty;-3)\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$; **(B)** $(-\infty;-3)\cup(3;+\infty)$;

(C) $(-3;3)$; **(D)** $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-9>0 \\ x^2-8x+16\geq 0 \\ x-4+\sqrt{x^2-8x+16}\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-3 \end{array}\right. \\ (x-4)^2\geq 0 \\ x-4+|x-4|\neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<-3 \end{array}\right. \\ x\neq 4 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x\in(-\infty;-3)\cup(3;4)\cup(4;+\infty)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\log_{m^2-9}x$ nghịch biến trên tập xác định.

(A) $m\in\left(3;\sqrt{10}\right)$; **(B)** $m\in\left(-\sqrt{10};-3\right)$;

(C) $m\in\left[-\sqrt{10};-3\right]\cup\left[3;\sqrt{10}\right]$; **(D)** $m\in\left(-\sqrt{10};-3\right)\cup\left(3;\sqrt{10}\right)$.

Giải:

TXĐ: $D=(0;+\infty)$.

Để hàm số nghịch biến trên D thì $0<m^2-9<1 \Leftrightarrow 9<m^2<10 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\sqrt{10}<m<-3 \\ 3<m<\sqrt{10} \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left(m^2-4m+4\right)^x$ đồng biến.

(A) $1<m<3$; **(B)** $m>3$; **(C)** $m<1$ hoặc $m>3$; **(D)** $m\in\mathbb{R}$.

Giải:

Để hàm số đồng biến thì $m^2-4m+4>1$

$\Leftrightarrow m^2-4m+3>0 \Leftrightarrow (m-1)(m-3)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} m>3 \\ m<1 \end{array}\right.$ $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 68 Tìm tất cả các giá trị của tham số m để hàm số $y=\left(m^2-5m+6\right)^x$ nghịch biến.

(A) $m>4$ hoặc $m<1$.

(B) $m>3$ hoặc $m<2$.

(C) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

(D) $\frac{5-\sqrt{5}}{2}<m<2$ hoặc $3<m<\frac{5+\sqrt{5}}{2}$.

Giải:

Để hàm số nghịch biến thì $0<m^2-5m+6<1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m^2-5m+6>0 \\ m^2-5m+5<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} m<2 \\ m>3 \end{array}\right. \\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}<m<\frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \frac{5-\sqrt{5}}{2}<m<2 \\ 3<m<\frac{5+\sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \textbf{Chọn (D).}$$

Bài tập 69 Cho hàm số $y=\frac{1}{2^x}$. Khẳng định nào dưới đây là SAI?

(A) $y'=\frac{1}{2^x}\ln\frac{1}{2}$.

(B) Hàm số đã cho đồng biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$.

(C) Đồ thị hàm số đã cho có một tiệm cận ngang là trục Ox.

(D) Toàn bộ đồ thị hàm số đã cho nằm trên trục Ox.

Giải:

+ Xét khẳng định A và B:

Ta có: $y=\frac{1}{2^x}=2^{-x} \Rightarrow y'=\left(2^{-x}\right)'=-2^{-x}\ln 2=-\frac{1}{2^x}\ln 2=\frac{1}{2^x}\ln\frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ (A) đúng.

Vì $\ln\frac{1}{2}<0$ và $\frac{1}{2^x}>0\ \forall x \Rightarrow$ Hàm số đã cho nghịch biến trên khoảng $(-\infty;+\infty)$

$\Rightarrow$ (B) sai.

+ Xét khẳng định C:

Ta có: $\lim\limits_{x\to+\infty} y=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{2^x}=0 \Rightarrow y=0$ là tiệm cận ngang $\Rightarrow$ (C) đúng.

+ Xét khẳng định D:

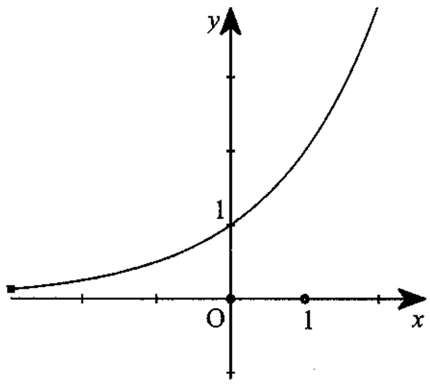
Vì $y=\frac{1}{2^x}>0\ \forall x \Rightarrow$ Toàn bộ đồ thị hàm số đã cho nằm trên trục Ox $\Rightarrow$ (D) đúng.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

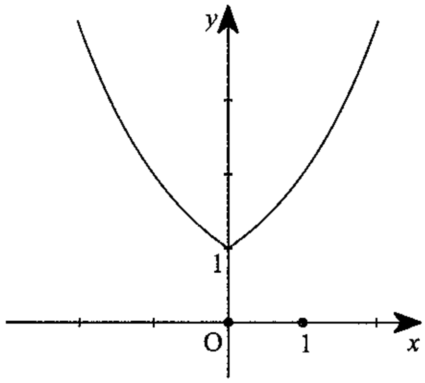
[illegible]

Bài tập 70 Cho hàm số $y=2^x$ có đồ thị Hình 1. Đồ thị Hình 2 là của hàm số nào dưới đây?

(A) $y=-2^x$; **(B)** $y=2^{|x|}$; **(C)** $y=-2^{|x|}$; **(D)** $y=2^{-x}$.



Hình 1



Hình 2

Giải:

Đồ thị hàm số ở Hình 2 có tính chất đối xứng qua Oy và nằm phía trên trục Ox $\Rightarrow$ Hình 2 là đồ thị của hàm số $y=2^{|x|}$ $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 71 Cho hàm số $y=e^{\sin x}$. Chọn hệ thức đúng.

(A) $y'\cos x-y''-y.\sin x=0$; **(B)** $y'\cos x+y''+y.\sin x=0$;

(C) $y'\sin x-y''-y.\cos x=0$; **(D)** $y'\sin x+y''+y.\cos x=0$.

Giải:

Ta có: $y'=\left(e^{\sin x}\right)'=\cos x.e^{\sin x}$.

$y''=\left(\cos x.e^{\sin x}\right)'=\left(\cos x\right)'e^{\sin x}+\cos x.\left(e^{\sin x}\right)'=-\sin x.e^{\sin x}+\cos^2 x.e^{\sin x}$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 72 Cho hàm số $y=x.e^{-x}$. Hãy chọn hệ thức đúng.

(A) $xy'=y\left(1+x\right)$; **(B)** $xy'=y\left(1-x\right)$;

(C) $xy=\left(1-x\right)y'$; **(D)** $xy=\left(1+x\right)y'$.

Giải:

Ta có: $y'=e^{-x}-xe^{-x}=e^{-x}\left(1-x\right)\Leftrightarrow xy'=xe^{-x}\left(1-x\right)=y\left(1-x\right)\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 73 Cho hàm số $y=x.e^{-\frac{x^2}{2}}$. Hãy chọn hệ thức đúng.

(A) $xy'=\left(1+x^2\right)y$; **(B)** $xy'=\left(1-x^2\right)y$;

(C) $xy=\left(1+x^2\right)y'$; **(D)** $xy=\left(1+x^2\right)y'$.

Giải:

Ta có: $y' = e^{-\frac{x^2}{2}} - x^2 e^{-\frac{x^2}{2}} = \left(1 - x^2\right) e^{-\frac{x^2}{2}} \Rightarrow xy' = \left(1 - x^2\right) y$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 74 Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số $y = x \ln x$ tại điểm $x = 1$ là:

(A) $y = x + 1$; **(B)** $y = 0$; **(C)** $y = x - 1$; **(D)** $y = 1$.

Giải:

Ta có: $y' = \ln x + 1 \Rightarrow y'(1) = 1$.

Phương trình tiếp tuyến của đồ thị hàm số tại điểm $x = 1$ là:

$y = y'(1)(x-1) + y(1) = 1(x-1) + 0 = x - 1$ hay $y = x - 1$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 75 Tìm tất cả các giá trị của m để hàm số $y = \log\left(x^2 - 4mx + m\right)$ có tập xác định là $\mathbb{R}$.

(A) $0 < m < \frac{1}{4}$; **(B)** $m < 0$ hoặc $m > \frac{1}{4}$;

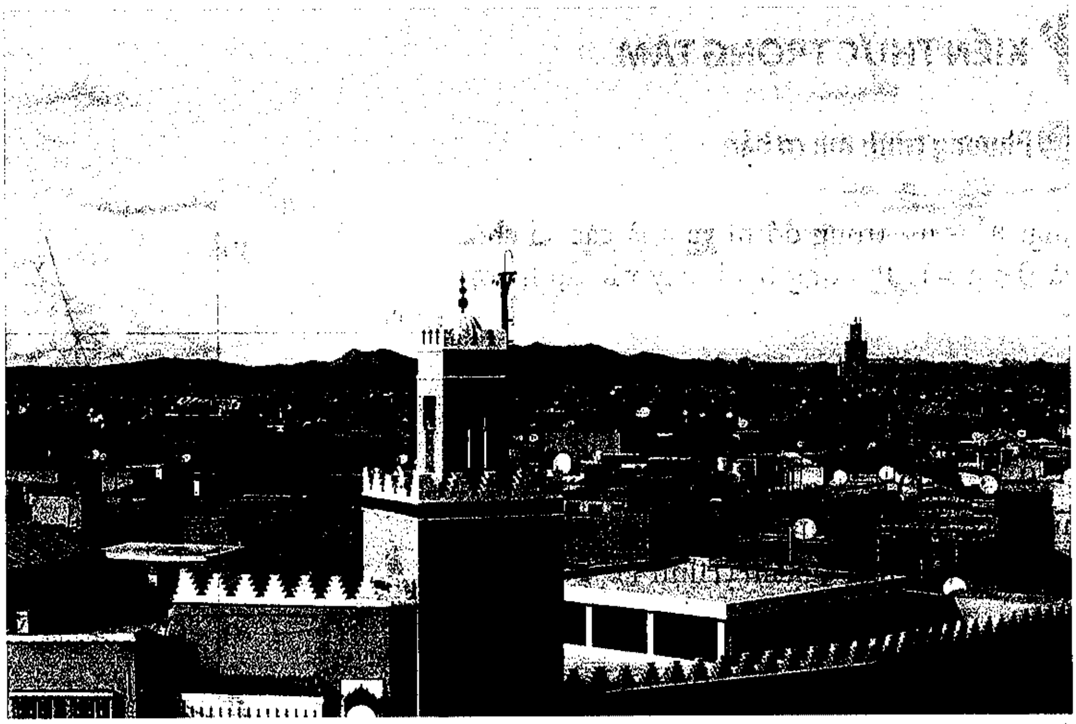
(C) $m \in \mathbb{R}$; **(D)** Không có giá trị của m thỏa mãn.

Giải:

Để hàm số có TXĐ là $\mathbb{R}$ thì $x^2 - 4mx + m > 0 \, \forall x \in \mathbb{R}$

$\Leftrightarrow \Delta' = (2m)^2 - m < 0 \Leftrightarrow 4m^2 - m < 0 \Leftrightarrow m(4m - 1) < 0 \Leftrightarrow 0 < m < \frac{1}{4}$

Marrakesh



Marrakesh là thành phố du lịch nổi tiếng của Morocco. Nơi đây vẫn lưu giữ được những nét đẹp của kiến trúc và văn hóa từ nhiều thế kỷ trước với các cung điện lộng lẫy, những khu vườn được chăm sóc cầu kỳ. Bạn có thể dành cả ngày để lang thang khắp các ngõ hẻm như mê cung của thành phố đầy màu sắc này

VẤN ĐỀ 2

PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

I. KIẾN THỨC TRỌNG TÂM

1. Phương trình mũ cơ bản

Dạng: $a^x = m$, trong đó m và a là các số cho trước và $0 < a \neq 1$. Phương trình này xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Dễ thấy rằng:

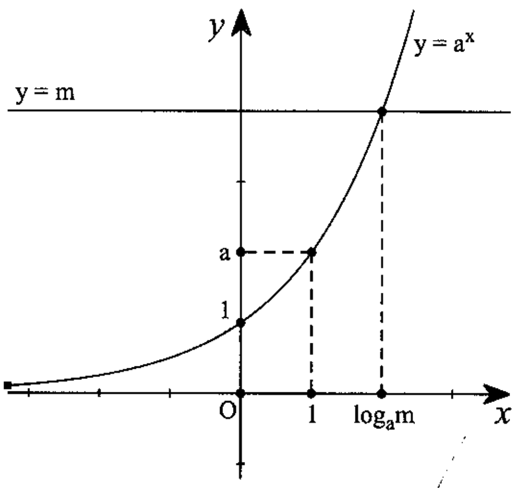
Khi $m \leq 0$, đường thẳng y = m không cắt đồ thị hàm số $y = a^x$.

Khi m > 0 đường thẳng y = m luôn cắt đồ thị hàm số $y = a^x$ tại đúng 1 điểm (Hình 1).

Do đó:

Nếu $m \leq 0$ thì phương trình $a^x = m$ vô nghiệm.

Nếu m > 0 thì phương trình $a^x = m$ có 1 nghiệm duy nhất $x = \log_a m$. Nói cách khác: $\forall x \in (0;+\infty), a^x = m \Leftrightarrow x = \log_a m$.



Hình 1

Ví dụ 1: a) $5^x = 25 \Leftrightarrow x = \log_5 25 = 2$.

b) $10^x = 1 \Leftrightarrow x = \log 1 = 0$.

c) $2^{x^2-5x+4} = 16 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = \log_2 16 \Leftrightarrow x^2 - 5x + 4 = \log_2 2^4$

$$x^2 - 5x + 4 = 4 \Leftrightarrow x^2 - 5x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 5 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: x = 0 và x = 5.

2. Phương trình lôgarit cơ bản

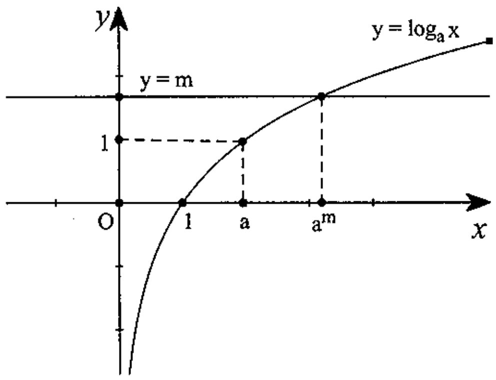
Dạng: $\log_a x = m$, trong đó m và a là các số cho trước và $0 < a \neq 1$. Điều kiện xác định của phương trình này là x > 0.

Dễ thấy đường thẳng y = m luôn cắt đồ thị hàm số $y = \log_a x$ tại đúng 1 điểm (Hình 2). Do đó:

Với mỗi giá trị tùy ý của m, phương trình $\log_a x = m$ luôn có 1 nghiệm duy nhất $x = a^m$.

Nói cách khác:

$\forall m \in (-\infty;+\infty), \log_a x = m \Leftrightarrow x = a^m.$



Hình 2

Ví dụ 2: a) $\log_3 x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}.$

$\ln x = 0 \Leftrightarrow x = e^0 = 1.$

b) $\log_3(2x-5) = 2.$

Điều kiện: $2x - 5 > 0 \Leftrightarrow x > \frac{5}{2}.$

Khi đó:

$\log_3(2x-5) = 2 \Leftrightarrow 2x - 5 = 3^2 \Leftrightarrow 2x - 5 = 9 \Leftrightarrow 2x = 14 \Leftrightarrow x = 7.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm là: x = 7.

II. MỘT SỐ PHƯƠNG PHÁP GIẢI PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số

1.1 Cách giải

a) Đối với phương trình mũ: Biến đổi phương trình về dạng: $a^{f(x)} = a^{g(x)}$.

- Nếu $0 < a \neq 1$ thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x)$.

- Nếu a thay đổi thì $a^{f(x)} = a^{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ (a-1)[f(x) - g(x)] = 0 \end{cases}$.

b) Đối với phương trình lôgarit: Biến đổi phương trình về dạng:

$$\log_a f(x) = \log_a g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ f(x) > 0 \\ f(x) = g(x) \end{cases}.$$

1.2 Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1: Nghiệm của phương trình $6^{x-1} = 216$ là:

(A) $x = 4$; **(B)** $x = 3$; **(C)** $x = 2$; **(D)** $x = 6$.

Giải:

$6^{x-1} = 216 \Leftrightarrow 6^{x-1} = 6^3 \Leftrightarrow x - 1 = 3 \Leftrightarrow x = 4.$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x = 4$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý:

1. Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập biểu thức $6^{x-1}-216$

Nhấn CALC với các đáp án $x=4; x=3; x=2; x=6$. Khi CALC với $x=4$ ta được kết quả bằng 0.

Chọn A.

2. Với tất cả các bài toán hỏi nghiệm của phương trình các em đều có thể thử nghiệm của phương trình theo cách này.

Nghiệm của phương trình $\log_2(2x-1)=3$ là:

(A) $x=9$; **(B)** $x=\frac{9}{2}$; **(C)** $x=9$; **(D)** $x=5$.

Giải:

$$\log_2(2x-1)=3 \Leftrightarrow \log_2(2x-1)=\log_2 2^3 \Leftrightarrow 2x-1=2^3 \Leftrightarrow 2x-1=8 \Leftrightarrow 2x=9 \Leftrightarrow x=\frac{9}{2}.$$

Vậy phương trình đã cho có nghiệm $x=\frac{9}{2}$. **Chọn (B).**

Lưu ý: Phương trình $\log_a f(x)=b \Leftrightarrow f(x)=a^b>0$ nên có thể bỏ qua điều kiện $f(x)>0$.

Tập nghiệm của phương trình $7^{x^2-4x+5}=49^x$ là:

(A) $\{2\}$; **(B)** $\{3\}$; **(C)** $\{2;3\}$; **(D)** $\varnothing$.

Giải:

$$7^{x^2-4x+5}=49^x \Leftrightarrow 7^{x^2-4x+5}=7^{2x} \Leftrightarrow x^2-4x+5=2x \Leftrightarrow x^2-6x+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\{2;3\}$. **Chọn (C).**

Số nghiệm của phương trình $8^{x^3-2x^2+2}=4^{x^2+x+3}$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

$$8^{x^3-2x^2+2}=4^{x^2+x+3} \Leftrightarrow 2^{3(x^3-2x^2+2)}=2^{2(x^2+x+3)} \Leftrightarrow 3(x^3-2x^2+2)=2(x^2+x+3)$$

$$\Leftrightarrow 3x^3 - 8x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow x\left(3x^2 - 8x - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 3x^2 - 8x - 2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \dfrac{4 - \sqrt{22}}{3} \\ x = \dfrac{4 + \sqrt{22}}{3} \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $x = 0; x = \dfrac{4 - \sqrt{22}}{3}; x = \dfrac{4 + \sqrt{22}}{3}$. **Chọn (C).**

Chú ý: Với bài toán số nghiệm của phương trình, sử dụng chức năng SHIFT CALC chúng ta chỉ nhẩm được nghiệm nào đó mà không chắc chắn được số nghiệm của phương trình. Do đó với bài toán này các em nên giải phương trình đã cho.

Nhập phương trình $8^{x^3 - 2x^2 + 2} = 4^{x^2 + x + 3}$ (Dấu "=" ta nhấn Anpha "="; phím = là phím CALC trên máy tính)

Nhấn SHIFT CALC

Nhập x = 8 rồi nhấn =

Khi đó máy tính sẽ nhẩm cho ta nghiệm gần với giá trị 8 nhất.

Số nghiệm của phương trình $3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 1.

Giải:

$$3^{x+1} + 3^{x-2} - 3^{x-3} + 3^{x-4} = 750 \Leftrightarrow 3.3^x + \frac{3^x}{9} - \frac{3^x}{27} + \frac{3^x}{81} = 750$$

$$\Leftrightarrow \left(3 + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \frac{1}{81}\right).3^x = 750 \Leftrightarrow 3^x = 3.81 \Leftrightarrow 3^x = 3^5 \Leftrightarrow x = 5.$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là: x = 5.

Chọn (D).

Số nghiệm thực dương của phương trình $2^{x^2 - x + 8} = 4^{x^2 + x + 3}$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 0.

Giải:

$$2^{x^2 - x + 8} = 4^{1 - 3x} \Leftrightarrow 2^{x^2 - x + 8} = 2^{2(1 - 3x)} \Leftrightarrow x^2 - x + 8 = 2 - 6x$$

$$\Leftrightarrow x^2 + 5x + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = -2 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm thực âm là: x = -3 và x = -2, không có nghiệm thực dương.

Chọn (D).

Bài tập 7 Số nghiệm thực của phương trình $\log_2(x+2)+\log_2(x-2)=2\ (1)$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ x-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>2.$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \log_2[(x+2)(x-2)]=\log_2 4$

$\Leftrightarrow (x+2)(x-2)=4 \Leftrightarrow x^2=8 \Leftrightarrow x=\pm 2\sqrt{2}.$

So sánh với điều kiện, nghiệm thực của phương trình là: $x=2\sqrt{2}.$ **Chọn (C).**

Bài tập 8 Tổng các nghiệm của phương trình $\log(x^2+2x-3)+\log(x+3)=\log(x-1)$ là:

(A) -1; **(B)** -3; **(C)** -6; **(D)** -5.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2+2x-3>0 \\ x+3>0 \\ x-1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$

$(2) \Leftrightarrow \log(x^2+2x-3)(x+3)=\log(x-1)$

$\Leftrightarrow (x^2+2x-3)(x+3)=x-1$

$\Leftrightarrow (x-1)(x+3)^2-(x-1)=0$

$\Leftrightarrow (x-1)(x^2+6x+8)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-2. \\ x=-4 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Tổng các nghiệm của phương trình là: 1 + (-2) + (-4) = -5 $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 9 Số nghiệm thực âm của phương trình $\frac{1}{2}\log_2 x^2=\log_2(3x+2)$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2>0 \\ 3x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\neq 0 \\ x>-\frac{2}{3} \end{cases}.$

Khi đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2 x^2=2\log_2(3x+2)$

$\Leftrightarrow \log_2 x^2=\log_2(3x+2)^2$

$$\Leftrightarrow x^2=(3x+2)^2 \Leftrightarrow 8x^2+12x+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x=-1 & (L) \\ x=-\dfrac{1}{2} & \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm thực âm là: $x=-\frac{1}{2}$. **Chọn (B).**

B. Vận dụng thông hiểu

Bài tập 10 Giả sử a là nghiệm dương của phương trình $2.5^{x^2-3}=5.2^{x^2-3}$. Khi đó, giá trị của $M=a^2+3^a-4$ là:

(A) $\frac{1}{9}$; **(B)** 2; **(C)** 9; **(D)** -2.

Giải:

$$2.5^{x^2-3}=5.2^{x^2-3} \Leftrightarrow \frac{5^{x^2-3}}{2^{x^2-3}}=\frac{5}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{x^2-3}=\left(\frac{5}{2}\right)^1$$

$$\Leftrightarrow x^2-3=1 \Leftrightarrow x^2=4 \Leftrightarrow x=\pm 2.$$

$\Rightarrow a=2.$

Khi đó, $M=2^2+3^2-4=9.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm x = -2 và x = 2.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập phương trình $2.5^{x^2-3}=5.2^{x^2-3}$.

(Dấu bằng ta nhập Anpha "=" (phím "=" chính là phím CALC trên máy tính))

Sử dụng chức năng SHIFT CALC

Ta nhấn SHIFT CALC, nhập $x=5$ chẳng hạn để máy tính nhẩm cho ta nghiệm gần giá trị 5 (với hi vọng là nghiệm dương). Kết quả thu được $x=2$. **Chọn C.**

Bài tập [illegible] Số nghiệm của phương trình $2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

$$2^{x^2-1}-3^{x^2}=3^{x^2-1}-2^{x^2+2} \Leftrightarrow 2^{x^2-1}-3.3^{x^2-1}=3^{x^2-1}-2^3.2^{x^2-1}$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-1}+2^3.2^{x^2-1}=3^{x^2-1}+3.3^{x^2-1} \Leftrightarrow 2^{x^2-1}\left(1+2^3\right)=3^{x^2-1}(1+3)$$

$$\Leftrightarrow 2^{x^2-1}.9=3^{x^2-1}.4 \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}=\frac{4}{9} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x^2-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^2 \Leftrightarrow x^2-1=2$$

$$\Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}.$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x=-\sqrt{3}$ và $x=\sqrt{3}$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Tập nghiệm của phương trình $\log_2^2(5x)+\log_2^2(7x)=\log_2^2 5+\log_2^2 7$ là:

(A) $\{1\}$; **(B)** $\left\{1;\dfrac{1}{35}\right\}$; **(B)** $\left\{\dfrac{1}{35}\right\}$; **(D)** $\varnothing$.

Giải:

Điều kiện: $x>0$.

Khi đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow (\log_2 x+\log_2 5)^2+(\log_2 x+\log_2 7)^2=\log_2^2 5+\log_2^2 7$

$\Leftrightarrow 2\log_2^2 x+2(\log_2 5+\log_2 7)\log_2 x=0$

$\Leftrightarrow (\log_2 x+\log_2 5+\log_2 7)\log_2 x=0$

$$\Leftrightarrow \log_2(35x).\log_2 x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2(35x)=0\\ \log_2 x=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}35x=1\\ x=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=\dfrac{1}{35}\\ x=1\end{array}\right. \text{(Thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=1$ và $x=\dfrac{1}{35}$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Số nghiệm của phương trình $\log_5 x^3+\log_{0,2} x+\log_{\sqrt[3]{25}} x=7$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $x>0$.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_5 x^3+\log_{5^{-1}} x+\log_{5^{\frac{2}{3}}} x=7$

$\Leftrightarrow 3\log_5 x-\log_5 x+\dfrac{3}{2}\log_5 x=7$

$\Leftrightarrow \left(3-1+\dfrac{3}{2}\right)\log_5 x=7$

$\Leftrightarrow \dfrac{7}{2}\log_5 x=7$

$\Leftrightarrow \log_5 x=2 \Leftrightarrow x=25.$

So sánh với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là: $x=25$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Tập nghiệm của phương trình $\log_2\dfrac{x-5}{x+5}+\log_2(x^2-25)=0$ là:

(A) $\{4;6\}$; **(B)** $\{8;6\}$; **(C)** $\{6\}$; **(D)** $\varnothing$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{x-5}{x+5}>0\\ x^2-25>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<-5\\ x>5\end{array}\right.$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{(x-5)(x^2-25)}{x+5} = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 (x-5)^2 = 0 \Leftrightarrow |x-5| = \log_2 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-5=1 \\ x-5=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=6 \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, phương trình có nghiệm duy nhất là: $x = 6$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập biểu thức $\log_2 \dfrac{x-5}{x+5} + \log_2 (x^2-25)$

Sau đó chúng ta CALC với các giá trị x ở các đáp án thấy rằng CALC với $x = 6$ thì biểu thức đã nhập bằng 0. $\Rightarrow$ **Chọn C.**

Tổng các nghiệm của phương trình $\log_4 (\log_2 x) + \log_2 (\log_4 x) = 2$ là:

(A) 1; **(B)** 4; **(C)** 2; **(D)** 16.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ \log_2 x > 0 \Leftrightarrow x > 1. \\ \log_4 x > 0 \end{cases}$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_{2^2} (\log_2 x) + \log_2 (\log_{2^2} x) = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2 (\log_2 x) + \log_2 \left(\dfrac{1}{2}\log_2 x\right) = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2}\log_2 (\log_2 x) + \log_2 \dfrac{1}{2} + \log_2 \log_2 x = 2$

$\Leftrightarrow \dfrac{3}{2}\log_2 (\log_2 x) = 2 \Leftrightarrow \log_2 (\log_2 x) = 2$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 4 \Leftrightarrow \log_2 x = \log_2 2^4 \Leftrightarrow x = 2^4 = 16.$

$\Rightarrow$ Tổng các nghiệm của phương trình là: 16 $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Chú ý: Câu này ta đã sử dụng công thức: $\log_{a^\alpha} x = \dfrac{1}{\alpha}\log_a x,\ 0 < a \neq 1.$

Số nghiệm dương của phương trình $\log_3 (3^{x+1} - 26) = 2 - x$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $3^{x+1} - 26 > 0 \Leftrightarrow 3^x > \dfrac{26}{3}.$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3\left(3^{x+1}-26\right)=\log_3 3^{2-x} \Leftrightarrow 3^{x+1}-26=3^{2-x}$

$\Leftrightarrow 3.3^{2x}-26.3^x-9=0$ (1)

Đặt $t=3^x>0$. Khi đó (1) trở thành: $3t^2-26t-9=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-\dfrac{1}{3} \\ t=9 \end{array}\right.$. So sánh với điều kiện ta có $t=9 \Rightarrow 3^x=9 \Leftrightarrow 3^x=3^2 \Leftrightarrow x=2$. Thay vào điều kiện thấy thỏa mãn.

Vậy x = 2 là nghiệm dương của phương trình đã cho. ⇒ **Chọn (B).**

Bài tập 17 Số nghiệm không âm của phương trình $\log_3\left(8-x+\sqrt{x^2+9}\right)=2$ là:

(A) 0; **(B)** 3; **(C)** 1; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: $8-x+\sqrt{x^2+9}>0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3\left(8-x+\sqrt{x^2+9}\right)=\log_3 3^2 \Leftrightarrow 8-x+\sqrt{x^2+9}=9$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+9}=x+1$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1\ge 0 \\ x^2+9=x^2+2x+1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -1 \\ x=4 \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$

Thay x = 4 vào điều kiện thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm không âm của phương trình là: x = 4. ⇒ **Chọn (C).**

Lưu ý: Cách giải phương trình: $\sqrt{f(x)}=g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x)\ge 0 \\ f(x)=\left[g(x)\right]^2 \end{cases}$.

Việc đặt điều kiện $g(x)\ge 0$ là cần thiết.

Bài tập 18 Phương trình $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=\log_5 x$ có:

(A) Vô số nghiệm; **(B)** 2 nghiệm;

(C) Duy nhất một nghiệm; **(D)** Hai nghiệm dương.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Phương trình đã cho $\log_2 x+\log_3 2.\log_2 x+\log_4 2.\log_2 x=\log_5 2.\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x.\left(1+\log_3 2+\log_4 2-\log_5 2\right)=0 \Leftrightarrow \log_2 x=0 \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình đã cho có duy nhất 1 nghiệm x = 1. ⇒ **Chọn (C).**

Chú ý: Ta đã sử dụng công thức: $\log_a c=\log_a b.\log_b c$ để làm xuất hiện nhân tử chung.

Bài tập 19 Nghiệm của phương trình $5^{|2x-3|}=125^x$ là:

(A) $x=-3$; **(B)** $x=\dfrac{3}{5}$; **(C)** $x=-3$ và $x=\dfrac{3}{5}$; **(D)** $x\in\varnothing$.

Giải:

$$5^{|2x-3|}=125^{x}\Leftrightarrow 5^{|2x-3|}=5^{3x}\Leftrightarrow |2x-3|=3x\Leftrightarrow \begin{cases}3x>0\\ \left[\begin{array}{l}2x-3=3x\\ 2x-3=-3x\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}x\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}x=-3\\ x=\dfrac{3}{5}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{3}{5}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=\frac{3}{5}$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Cách giải phương trình chứa dấu giá trị tuyệt đối: $|f(x)|=g(x)\Leftrightarrow \begin{cases}g(x)\geq 0\\ \left[\begin{array}{l}f(x)=g(x)\\ f(x)=-g(x)\end{array}\right.\end{cases}$.

Việc đặt điều kiện $g(x)\geq 0$ là cần thiết.

Bài tập 20 Tổng bình phương các nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}$ là:

(A) 1; **(B)** 9; **(C)** 5; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: $x\neq -1$.

Vì $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right)=5-4=1$ nên $\sqrt{5}-2=\frac{1}{\sqrt{5}+2}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$.

Phương trình được viết thành:

$$\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x-1}{x+1}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{5}+2\right)^{x-1}=\left(\sqrt{5}+2\right)^{-\frac{x-1}{x+1}}\Leftrightarrow x-1=-\frac{x-1}{x+1}$$

$$\Leftrightarrow x-1+\frac{x-1}{x+1}=0\Leftrightarrow (x-1)\left(1+\frac{1}{x+1}\right)=0\Leftrightarrow (x-1)(x+2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=1\\ x=-2\end{array}\right.\text{(thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: x = -2 và x = 1.

$\Rightarrow$ Tổng bình phương các nghiệm của phương trình là $(-2)^2+1^2=5$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nhận xét: Đối với những bài chứa biểu thức dạng $\sqrt{A}+\sqrt{B}$ hoặc $\sqrt{A}-\sqrt{B}$ thì ta nên lưu ý đến hằng đẳng thức thứ 3: $A-B=\left(\sqrt{A}-\sqrt{B}\right)\left(\sqrt{A}+\sqrt{B}\right)$.

Bài tập 21 Số nghiệm âm của phương trình $\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}=\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x-1\neq 0\\ x+3\neq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\neq 1\\ x\neq -3\end{cases}$.

Vì $\left(\sqrt{10}+3\right)\left(\sqrt{10}-3\right)=10-9=1$ nên $\sqrt{10}-3=\frac{1}{\sqrt{10}+3}=\left(\sqrt{10}+3\right)^{-1}$.

Khi đó:

$$\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}=\left(\sqrt{10}-3\right)^{\frac{x+1}{x+3}}\Leftrightarrow\left(\sqrt{10}+3\right)^{\frac{x-3}{x-1}}=\left(\sqrt{10}+3\right)^{-\frac{x+1}{x+3}}\Leftrightarrow\frac{x-3}{x-1}=-\frac{x+1}{x+3}$$

$$\Leftrightarrow(x-3)(x+3)=-(x+1)(x-1)\Leftrightarrow x^2-9=-x^2+1\Leftrightarrow 2x^2=10\Leftrightarrow x^2=5$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\sqrt{5}\\x=-\sqrt{5}\end{array}\right.\text{ (thỏa mãn).}$$

Vậy phương trình có 1 nghiệm âm là: $x=-\sqrt{5}$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Tập nghiệm của phương trình $\left(7+\sqrt{48}\right)^{\sqrt{x^2-2x+9}}=\left(7-\sqrt{48}\right)^{2x-7}$ là:

(A) $\left\{\frac{20}{3}\right\}$; **(B)** $\left\{2;\frac{20}{3}\right\}$; **(C)** $\{2\}$; **(D)** $\varnothing$.

Giải:

Vì $x^2-2x=9=(x-1)^2=8>0\,\forall x\in\mathbb{R}$ nên phương trình xác định với $\forall x\in\mathbb{R}$.

Ta có: $\left(7+\sqrt{48}\right)\left(7-\sqrt{48}\right)=49-48=1\Rightarrow 7-\sqrt{48}=\dfrac{1}{7+\sqrt{48}}=\left(7+\sqrt{48}\right)^{-1}$.

Khi đó phương trình $\Leftrightarrow\left(7+\sqrt{48}\right)^{\sqrt{x^2-2x+9}}=\left(7+\sqrt{48}\right)^{-2x+7}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x+9}=-2x+7$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}-2x+7\ge 0\\x^2-2x+9=(-2x+7)^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{7}{2}\\3x^2-26x+40=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\le\dfrac{7}{2}\\\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\dfrac{20}{3}\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow x=2\text{ (thỏa mãn)}$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=2$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Cách giải phương trình: $\sqrt{f(x)}=g(x)\Leftrightarrow\begin{cases}g(x)\ge 0\\f(x)=[g(x)]^2\end{cases}$.

Việc đặt điều kiện $g(x)\ge 0$ là cần thiết.

Nghiệm của phương trình $\log_4(x+1)^2+2=\log_{\sqrt{2}}\sqrt{4-x}+\log_8(4+x)^3$ là:

(A) $x=2$ hoặc $x=2-2\sqrt{24}$; **(B)** $x=2$; **(C)** $x=2-2\sqrt{24}$; **(D)** $x=2\sqrt{6}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}(x+1)^2>0\\4-x>0\\(4+x)^3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ne -1\\x<4\\x>-4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-4<x<-1\\-1<x<4\end{cases}$.

Khi đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow\log_2|x+1|+2=\log_2(4-x)+\log_2(4+x)$

$\Leftrightarrow\log_2 4|x+1|=\log_2\left(16-x^2\right)$

$$\Leftrightarrow 4|x+1| = 16 - x^2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<4\\4(x+1)=16-x^2\end{cases}\\\begin{cases}-4<x<-1\\-4(x+1)=16-x^2\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}-1<x<4\\x^2+4x-12=0\end{cases}\\\begin{cases}-4<x<-1\\x^2-4x-20=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=2\\x=2-2\sqrt{24}\end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = 2$ hoặc $x = 2 - 2\sqrt{24}$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Số nghiệm của phương trình

$\frac{1}{3}\log_2(3x-4)^6.\log_2 x^3 = 8\left(\log_2\sqrt{x}\right)^2 + \left[\log_2(3x-4)^2\right]^2$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}(3x-4)^6>0\\(3x-4)^2>0\\x^3>0\\\sqrt{x}>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3x-4\neq 0\\x>0\end{cases} \Leftrightarrow 0<x\neq\frac{4}{3}.$

Phương trình $\Leftrightarrow \frac{6}{3}\log_2|3x-4|.3\log_2 x = 8\left(\frac{1}{2}\log_2 x\right)^2 + \left[2\log_2|3x-4|\right]^2$

$\Leftrightarrow 6\log_2|3x-4|.\log_2 x = 2(\log_2 x)^2 + 4\left(\log_2|3x-4|\right)^2$

$\Leftrightarrow 2(\log_2 x)^2 - \log_2|3x-4|.\log_2 x = 2\left(\log_2|3x-4|\right)^2 - 2\log_2|3x-4|.\log_2 x = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x\left(\log_2 x - \log_2|3x-4|\right) - 2\log_2|3x-4|\left(-\log_2|3x-4| + \log_2 x\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left(\log_2 x - \log_2|3x-4|\right)\left(\log_2 x - 2\log_2|3x-4|\right) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x - \log_2|3x-4| = 0\\\log_2 x - 2\log_2|3x-4| = 0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x = \log_2|3x-4|\\\log_2 x = 2\log_2|3x-4| = \log_2|3x-4|^2\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}x=|3x-4|\\x=|3x-4|^2\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x>0\\\left[\begin{array}{l}x=3x-4\\x=-(3x-4)\\9x^2-25x+16=0\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=2\\x=\frac{16}{9}\end{array}\right..$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 3 nghiệm. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: $\log_a\left[f(x)\right]^2 = 2\log_a|f(x)|$. Tránh trường hợp không để ý đến dấu của f(x) mà cho rằng $\log_a\left[f(x)\right]^2 = 2\log_a f(x)$.

Bài tập 25 Số nghiệm của phương trình $\log_2(3x-1)+\frac{1}{\log_{x+3}2}=2+\log_2(x+1)$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}3x-1>0\\0<x+3\neq 1\Leftrightarrow x>\frac{1}{3}.\\x+1>0\end{cases}$

Khi đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2(3x-1)+\log_2(x+3)=2+\log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2(3x-1)(x+3)=\log_2 4(x+1)$

$$\Leftrightarrow (3x-1)(x+3)=4(x+1)\Leftrightarrow 3x^2+4x-7=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\x=-\frac{7}{3}\ (L)\end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có 1 nghiệm là: x = 1. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

D. Về đích

Bài tập 26 Tập nghiệm của phương trình $(1+x-2x^2)^{\cos x}=(1+x-2x^2)^{2-\sqrt{3}\sin x}$ là:

(A) $\left\{0;\frac{1}{2}\right\}$; **(B)** $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; **(C)** $\{0\}$; **(D)** $\left\{0;\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right\}$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}1+x-2x^2>0\\(1+x-2x^2-1)(\cos x-2+\sqrt{3}\sin x)=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}-\frac{1}{2}<x<1 & (1)\\ \left[\begin{array}{ll}x-2x^2=0 & (2)\\ \cos x-2+\sqrt{3}\sin x=0 & (3)\end{array}\right.\end{cases}$$

Giải (2) ta được x = 0 và $x=\frac{1}{2}$ thỏa mãn (1).

Giải (3):

$$\cos x-2+\sqrt{3}\sin x=0\Leftrightarrow \frac{\sqrt{3}}{2}\sin x+\frac{1}{2}\cos x=1\Leftrightarrow \sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)=1\Leftrightarrow x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}+k2\pi$$

$$\Leftrightarrow x=\frac{\pi}{3}+k2\pi$$

Để nghiệm thỏa mãn (1) thì:

$$-\frac{1}{2}<\frac{\pi}{3}+k2\pi<1\Leftrightarrow -\frac{1}{4\pi}-\frac{1}{6}<k<\frac{1}{2\pi}-\frac{1}{6}\ \text{ mà } k\in\mathbb{Z} \text{ nên } k=0\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{0;\frac{1}{2};\frac{\pi}{3}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 27 Bạn An giải phương trình $(x-6)^{3x^2-5x+2}=(x^2-12x+36)^{x^2+x-4}$ theo các bước dưới đây. Hỏi bạn An đã giải SAI từ bước nào?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Bước 1: Phương trình được biến đổi về dạng $(x-6)^{3x^2-5x+2}=\left[(x-6)^2\right]^{x^2+x-4}$

Bước 2: $\Leftrightarrow (x-6)^{3x^2-5x+2}=(x-6)^{2(x^2+x-4)}$

Bước 3: $\Leftrightarrow 3x^2-5x+2=2(x^2+x-4)\Leftrightarrow x^2-7x+10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=4\\x=5\end{array}\right.$

Bước 4: Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt là $x=4$ và $x=5$.

Giải:

Phương trình được biến đổi về dạng:

$$(x-6)^{3x^2-5x+2}=\left[(x-6)^2\right]^{x^2+x-4}=(x-6)^{2(x^2+x-4)}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x-6=1\\ \begin{cases}0<x-6\neq 1\\ 3x^2-5x+2=2x^2=2x-8\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=7\\ \begin{cases}6<x\neq 7\\ x^2-7x+10=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow x=7.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=7$.

Do đó, phương trình được giải từ bước 2 $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý:

- Để giải phương trình $\left[f(x)\right]^{m(x)}=\left[g(x)\right]^{n(x)}$ thì cần phải tìm điều kiện $f(x)>0,\ g(x)>0$.

Bài tập 28 Phương trình $\log_2 x+\log_3 x+\log_4 x=\log_{20} x$

(A) Có vô số nghiệm; **(B)** Có 1 nghiệm duy nhất;

(C) Vô nghiệm; **(D)** Có 2 nghiệm dương phân biệt.

Giải:

Điều kiện: $x>0$.

Cách 1: $(*)\Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3}+\dfrac{\log_2 x}{\log_2 4}=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 20}$

$$\Leftrightarrow \log_2 x.\left(1+\frac{1}{\log_2 3}+\frac{1}{\log_2 4}-\frac{1}{\log_2 20}\right)=0$$

$\Leftrightarrow \log_2 x=0\Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm $x=1$.

Cách 2:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{\ln x}{\ln 2}+\dfrac{\ln x}{\ln 3}+\dfrac{\ln x}{\ln 4}-\dfrac{\ln x}{\ln 20}=0$

$$\Leftrightarrow \ln x.\left(\frac{1}{\ln 2}+\frac{1}{\ln 3}+\frac{1}{\ln 4}-\frac{1}{\ln 20}\right)=0$$

$\Leftrightarrow \ln x=0 \Leftrightarrow x=1.$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất là: x = 1. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Trong cách giải 1 đã sử dụng công thức biến đổi cơ số: $\log_a x=\dfrac{\log_c x}{\log_c a}$ và trong cách giải 2, cũng sử dụng công thức ấy nhưng cụ thể với c = e, khi đó: $\log_a x=\dfrac{\ln x}{\ln a}$. Sử dụng công thức biến đổi trên để làm xuất hiện nhân tử chung.

Thêm một trường hợp cho cách sử dụng công thức biến đổi trên:

Ví dụ 22 Tập nghiệm của phương trình $\log_2 x+\log_3 x+\log_5 x=\log_2 x.\log_3 x.\log_5 x$ là:

(A) $\left\{1;5^{\pm\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}\right\}$; **(B)** $\left\{1;5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}}\right\}$; **(C)** $\{1\}$; **(D)** $\varnothing$.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \log_2 x+\log_3 2.\log_2 x+\log_5 2.\log_2 x=\log_2 x\left(\log_3 5.\log_3 x\right).\log_5 x$$

$$\Leftrightarrow \log_2 x\left(1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 x\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\log_2 x=0\\ 1+\log_3 2+\log_5 2-\log_3 5.\log_5^2 x=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \log_5^2 x=\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ \log_5 x=\pm\sqrt{\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện ta có nghiệm của phương trình là: x = 1 và $x=5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}}$.

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=1\\ x=5^{\pm\sqrt{\frac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}}\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{1;\pm\sqrt{\dfrac{1+\log_3 2+\log_5 2}{\log_3 5}}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Sử dụng công thức $\log_a x = \dfrac{\log_c x}{\log_c a} \Leftrightarrow \log_c x = \log_c a.\log_a x$ để đưa về $\log_2 x$ nhằm xuất hiện nhân tử chung.

Phương trình $27^{\log_3(x^2-6)} = (2x+3)^3$

(A) Có một nghiệm thực dương duy nhất.

(B) Có hai nghiệm thực phân biệt.

(C) Có hai nghiệm thực dương.

(D) Vô nghiệm.

Giải:

Điều kiện: $x^2 - 6 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > \sqrt{6} \\ x < -\sqrt{6} \end{array}\right.$.

Khi đó, phương trình $\Leftrightarrow 3^{3\log_3(x^2-6)} = (2x+3)^3$

$\Leftrightarrow \left[3^{\log_3(x^2-6)}\right]^3 = (2x+3)^3 \Leftrightarrow 3^{\log_3(x^2-6)} = 2x+3$

$\Leftrightarrow x^2 - 6 = 2x + 3 \Leftrightarrow x^2 - 2x - 9 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{10}$

So sánh với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm thực dương duy nhất là: $x = 1 + \sqrt{10}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Bài này ta đã sử dụng công thức $a^{\log_a x} = x$ để biến đổi tương đương phương trình.

Tìm m để phương trình $\dfrac{1}{3^{x^2-4x+5}} = \dfrac{1}{9^{2m+1}}$ có 2 nghiệm trái dấu.

(A) $m < \dfrac{3}{4}$; **(B)** $m > \dfrac{3}{4}$; **(C)** $m > -\dfrac{1}{4}$; **(D)** Không có giá trị của m.

Giải:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{3}\right)^{x^2-4x+5} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{2m+2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 4m + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - 4m = 0 \qquad (1)$

Phương trình đã cho có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow 3 - 4m < 0 \Leftrightarrow m > \dfrac{3}{4}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Tìm m để phương trình $\dfrac{1}{3^{x^2-4x+5}} = \dfrac{1}{9^{2m+1}}$ có 2 nghiệm thuộc khoảng (1; 5).

(A) $-1 < m < 0$; **(B)** $m < 0$; **(C)** $m > -1$; **(D)** $-\dfrac{1}{4} < m < 0$.

Giải:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\frac{1}{3}\right)^{x^2-4x+5} = \left(\frac{1}{3}\right)^{2m+2}$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 5 = 4m + 2$

$\Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 - 4m = 0$ (1)

Ta có: $(1) \Leftrightarrow x^2 - 4x + 3 = 4m$ (2)

Phương trình đã cho có 2 nghiệm thuộc khoảng (1; 5) $\Leftrightarrow$ phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc khoảng (1; 5).

Lập bảng biến thiên của hàm số $y = f(x) = x^2 - 4x + 3$ trên (1; 5)

x	1		2		5
f'(x)		+	0	+	
f(x)	0	↘	-1	↗	8

Từ bảng biến thiên suy ra phương trình (2) có 2 nghiệm thuộc khoảng (1; 5)

$\Leftrightarrow -1 < 4m < 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{4} < m < 0.$

Vậy với $-\frac{1}{4} < m < 0$ thì phương trình (1) có 2 nghiệm thuộc khoảng (1; 5).

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Có thể sử dụng định lí tam thức bậc hai để làm.

2. Phương pháp lôgarit hóa

2.1) Cách giải:

- *Dạng 1:* Phương trình: $a^{f(x)} = b \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \neq 1, b > 0 \\ f(x) = \log_a b \end{cases}$

Ví dụ 1: $2^x = 3 \Leftrightarrow x = \log_2 3.$

- *Dạng 2:* $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_a a^{f(x)} = \log_a b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x) = g(x).\log_a b$

Hoặc $a^{f(x)} = b^{g(x)} \Leftrightarrow \log_b a^{f(x)} = \log_b b^{g(x)} \Leftrightarrow f(x).\log_b a = g(x)$

Ví dụ 2: $2^x = 3^{x+1} \Leftrightarrow \log_2 2^x = \log_2 3^{x+1} \Leftrightarrow x = (x+1)\log_2 3 \Leftrightarrow x = \frac{\log_2 3}{1 - \log_2 3}.$

Đặc biệt: Khi cơ số khác nhau nhưng số mũ bằng nhau.

$a^{f(x)} = b^{f(x)} \Leftrightarrow \left(\frac{a}{b}\right)^{f(x)} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \Leftrightarrow f(x) = 0 \text{ (vì } b^{f(x)} > 0)$

Ví dụ 3: $2^x = 3^x \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x = 1 = \left(\frac{2}{3}\right)^0 \Leftrightarrow x = 0.$

2.2) Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Các nghiệm của phương trình $3^{x^2-2x}=\frac{5}{3}$ là:

(A) $x=1+\sqrt{\log_3 5}$; **(B)** $x=1-\sqrt{\log_3 5}$;

(C) $x=1\pm\sqrt{\log_3 5}$; **(D)** $x=\pm\sqrt{\log_3 5}$.

Giải:

Lấy logarit cơ số 3 hai vế phương trình ta được:

$$\log_3 3^{x^2-2x}=\log_3\frac{5}{3}\Leftrightarrow x^2-2x=\log_3 5-1\Leftrightarrow x^2-2x+1-\log_3 5=0$$

Ta có: $\Delta'=1-1+\log_3 5=\log_3 5\Rightarrow$ phương trình có các nghiệm là: $x=1\pm\sqrt{\log_3 5}$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 2 Nghiệm của phương trình $3^x+3^{x+1}+3^{x+2}=26$ là:

(A) $x=2$; **(B)** $x=\log_3 2$; **(C)** $x=\log_2 3$; **(D)** $x=3$.

Giải:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3^x\left(1+3+3^2\right)=26$

$\Leftrightarrow 3^x.13=26\Leftrightarrow 3^x=2\Leftrightarrow x=\log_3 2$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 3 Số nghiệm của phương trình $2^{x-2}=3^{x^2-5x+6}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

TXĐ: $D=\mathbb{R}$.

Lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2 2^{x-2}=\log_2 3^{x^2-5x+6}$

$\Leftrightarrow (x-3)\log_2 2=\left(x^2-5x+6\right)\log_2 3$

$\Leftrightarrow (x-3)-(x-2)(x-3)\log_2 3=0$

$\Leftrightarrow (x-3)\left[1-(x-2)\log_2 3\right]=0$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x-3=0\\1-(x-2)\log_2 3=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=\log_3 2+2=\log_3 18\end{array}\right..$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là $x = 3$ và $x = \log_3 18$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: $\dfrac{1}{\log_2 3} = \dfrac{\log_2 2}{\log_2 3} = \log_3 2$.

Cho phương trình $2^{x^2-4}.6^{2-x} = 1$. Khẳng định nào dưới đây là ĐÚNG về phương trình đã cho?

(A) Có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

(B) Có duy nhất 1 nghiệm dương.

(C) Có 1 nghiệm âm.

(D) Có 2 nghiệm dương phân biệt.

Giải:

TXĐ: $D = \mathbb{R}$.

Lấy logarit cơ số 2 hai vế ta có: $\log_2\left(2^{x^2-4}.6^{2-x}\right) = \log_2 1$

$\Leftrightarrow \log_2 2^{x^2-4} + \log_2 6^{2-x} = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - 4 + (2-x)\log_2 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2) - (x-2)\log_2 6 = 0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2-\log_2 6) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 + \log_2 6 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm dương là: $x = 2$ và $x = -2 + \log_2 5$. **Chọn (D).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Với bài toán này các em hoàn toàn có thể sử dụng chức năng SHIFT CALC (nhẩm nghiệm trên máy tính)

Nhập phương trình $2^{x^2-4}.6^{2-x} = 1$ sau đó nhấn SHIFT CALC

CALC với $x = 3$ và $x = -3$ để máy tính nhẩm cho ta các giá trị nghiệm gần với 2 số trên nhất ta được 2 nghiệm $x = 2$ và $x \approx 0{,}5849625007$. $\Rightarrow$ **Chọn D.**

Nghiệm âm của phương trình $8^{\frac{x}{x+2}} = 4.3^{4-x}$ là:

(A) $x = -\log_2 3$; **(B)** $x = -2 + \log_2 3$; **(C)** $x = -2 - \log_2 3$; **(D)** $x = -4$.

Giải:

Điều kiện: $x \neq -2$.

Khi đó $(*) \Leftrightarrow \dfrac{2^{\frac{3x}{x+2}}}{2^2} = 3^{4-x} \Leftrightarrow 2^{\frac{3x}{x+2}-2} = 3^{4-x}$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{x-4}{x+2}} = 3^{4-x}$. Lấy logarit cơ số 2 hai vế ta được:

$$\log_2 2^{\frac{x-4}{x+2}} = \log_2 3^{4-x} \Leftrightarrow \frac{x-4}{x+2} = (4-x)\log_2 3 \Leftrightarrow (x-4)\left(\frac{1}{x+2} + \log_2 3\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x-4=0 \\ \dfrac{1}{x+2} = -\log_2 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=-2-\log_2 3 \end{array}\right..$$

So sánh với điều kiện suy ra phương trình (*) có 2 nghiệm $x = 4 > 0$ và $x = -2 - \log_2 3 < 0$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Có thể lấy logarit cơ số 2 hoặc 3.

Tập nghiệm của phương trình $x^{\log x} = 1000x^2$ là:

(A) $\left\{\frac{1}{10};10;100\right\}$; **(B)** $\left\{\frac{1}{10};100;1000\right\}$; **(C)** $\{1000\}$; **(D)** $\left\{\frac{1}{10};1000\right\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Lấy logarit cơ số 10 hai vế của phương trình ta được:

$$\log\left(x^{\log x}\right) = \log\left(1000x^2\right) \Leftrightarrow \log x.\log x = \log 1000 + \log x^2$$

$$\Leftrightarrow (\log x)^2 - 2\log x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = -1 \\ \log x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 10^{-1} = \dfrac{1}{10} \\ x = 10^3 = 1000 \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện suy ra tập nghiệm của phương trình là: $\left\{\frac{1}{10};1000\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Số nghiệm của phương trình $3^{x^2-2}.4^{\frac{2x-3}{x}} = 18$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $x \neq 0$.

Lấy logarit cơ số 3 hai vế, ta được:

$$(*) \Leftrightarrow \log_3\left(3^{x^2-2}.4^{\frac{2x-3}{x}}\right) = \log_3 18$$

$$\Leftrightarrow \log_3 3^{x^2-2} + \log_3 4^{\frac{2x-3}{x}} = \log_3 18$$

$\Leftrightarrow \left(x^2-2\right)+\log_3 2^{\frac{4x-6}{x}}=\log_3 9.2$

$\Leftrightarrow x^2-2+\dfrac{(4x-6)}{x}\log_3 2=\log_3 9+\log_3 2$

$\Leftrightarrow x^2-2+\left(\dfrac{4x-6}{x}\right)\log_3 2-2-\log_3 2=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)+\left(\dfrac{4x-6}{x}-1\right)\log_3 2=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-4\right)+\dfrac{3x-6}{x}\log_3 2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)(x+2)+\dfrac{3(x-2)}{x}\log_3 2=0$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(x+2+\dfrac{3}{x}\log_3 2\right)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ x^2+2x+3\log_3 2=0 \ \ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow x=2.$

So sánh với điều kiện suy ra phương trình có nghiệm là: x = 2. ⇒ **Chọn (B).**

C. Tăng tốc

Bài tập 8 Tích các nghiệm của phương trình $x^{\log_4 x+4}=1024$ là:

(A) 256; **(B)** 4; **(C)** $\dfrac{1}{256}$; **(D)** $\dfrac{1}{1024}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\neq 1 \end{cases}$.

Lấy logarit cơ số 4 hai vế ta được:

$\log_4 x^{\log_4 x+4}=\log_4 1024 \Leftrightarrow (\log_4 x+4).\log_4 x=5 \Leftrightarrow (\log_4 x)^2+4\log_4 x-5=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_4 x=1 \\ \log_4 x=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4 \\ x=4^{-5}=\dfrac{1}{1024} \end{array}\right.$

So sánh với điều kiện suy ra phương trình có 2 nghiệm là: x = 4 và $x=\dfrac{1}{1024}$.

⇒ Tích các nghiệm của phương trình là: $4.\dfrac{1}{1024}=\dfrac{1}{256}$ ⇒ **Chọn (C).**

Bài tập 9 Tập nghiệm của phương trình $\left(x^2+x+1\right)^{x^2-4}=1$ là:

(A) $S=\left\{0;-1;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$; **(B)** $S=\left\{0;-1\right\}$; **(C)** $S=\left\{0\right\}$; **(D)** $S=\left\{-1\right\}$.

Giải:

Vì $x^2+x+1=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0\ \forall x \Rightarrow$ phương trình xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\left(x^2+x+1\right)^{x^2-4}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2+x+1=1 \\ \begin{cases} x^2+x+1\neq 1 \\ x^2-4=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0; x=-1 \\ x=\pm 2 \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S=\left\{0;-1;-\sqrt{2};\sqrt{2}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 10 Số nghiệm thực của phương trình $\left(\sqrt{x-x^2}\right)^{x+3}=1$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $x-x^2>0 \Leftrightarrow 0<x<1$.

Khi đó, $\left(\sqrt{x-x^2}\right)^{x+3}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{x-x^2}=1 \\ \begin{cases} \sqrt{x-x^2}\neq 1 \\ x+3=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-x+1=0\ \text{(VN)} \\ \begin{cases} x^2-x+1\neq 0 \\ x=-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=-3$ (loại)

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 11 Số nghiệm của phương trình $\left(x^2-4x+5\right)^{\sqrt{4-x^2}}=1$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-4x+5>0 \\ 4-x^2\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2\leq x\leq 2$.

Khi đó, $\left(x^2-4x+5\right)^{\sqrt{4-x^2}}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+5=1 \\ \begin{cases} x^2-4x+5\neq 1 \\ \sqrt{4-x^2}=0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \begin{cases} x\neq 2 \\ x=\pm 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x=\pm 2$ (thỏa mãn)

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: x = 2 và x = -2. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

[illegible]

Bài tập 12 Tập nghiệm của phương trình $5^{\log_{49}^2(7x)-1}=x^{\log_7 5}$ là:

(A) $\left\{\frac{1}{7}\right\}$; **(B)** $\left\{343\right\}$; **(C)** $\left\{\frac{1}{7};343\right\}$; **(D)** $\varnothing$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \end{cases}$.

Lấy logarit cơ số 5 hai vế của phương trình ta được:

$$\log_5\left(5^{\log_{49}^2(7x)-1}\right) = \log_5\left(x^{\log_7 5}\right)$$

$$\Leftrightarrow \log_{49}^2(7x) - 1 = \log_7 5.\log_5 x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2}\log_7 7x\right)^2 - 1 = \log_7 x$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\log_7 x\right)^2 - \log_7 x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{4}(\log_7 x)^2 - \frac{1}{2}\log_7 x - \frac{3}{4} = 0$$

$$\Leftrightarrow (\log_7 x)^2 - 2\log_7 x - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_7 x = -1 \\ \log_7 x = 3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 7^{-1} = \dfrac{1}{7} \\ x = 7^3 = 343 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{\frac{1}{7}; 343\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Các họ nghiệm của phương trình: $8^{\log_{0,5}\left(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\right)} = \frac{1}{27}$ là:

(A) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$.

(B) $x = \operatorname{arccot} 5 + k\pi$.

(C) $x = \frac{\pi}{2} + k2\pi$.

(D) $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \operatorname{arccot} 5 + k\pi$.

Giải:

Điều kiện: $\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2 > 0$ (*)

Khi đó phương trình (*) trở thành: $\log_{\frac{1}{2}}\left(\sin^2 + 5\sin x\cos x + 2\right) = \log_8 27$

$$\Leftrightarrow \log_{2^{-1}}\left(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\right) = \log_{2^3} 3^{-3}$$

$$\Leftrightarrow -\log_2\left(\sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2\right) = -\log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \log_2\left(\sin^2 + 5\sin x\cos x + 2\right) = \log_2 3$$

$$\Leftrightarrow \sin^2 x + 5\sin x\cos x + 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sin^2 x - 5\sin x\cos x + 2 = 3$$

$$\Leftrightarrow \cos^2 x - 5\sin x\cos x = 0$$

$\Leftrightarrow \cos x(\cos x - 5\sin x) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos x = 0\\ \cos x - 5\sin x = 0\end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\\ \cos x = 5\sin x\end{array}\right.$

Ta thấy $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi\ (k \in \mathbb{Z})$ thỏa mãn điều kiện (*)

Giải phương trình: cosx = 5sinx.

Ta thấy: sinx = 0 không là nghiệm của phương trình nên chia cả 2 vế của phương trình cho sinx ta được:

$\cot x = 5 \Leftrightarrow x = \operatorname{arccot} 5 + k\pi, (k \in \mathbb{Z})$ (thỏa mãn (*))

Vậy phương trình đã cho có hai họ nghiệm: $x = \dfrac{\pi}{2} + k\pi$ và $x = \operatorname{arccot} 5 + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: $\log_{a^\alpha} b = \dfrac{1}{\alpha}.\log_a b; \log_a b^\alpha = \alpha \log_a b; \log_{a^\alpha} b^\alpha = \dfrac{1}{\alpha}.\alpha.\log_a b = \log_a b.$

3. Phương pháp đặt ẩn phụ

◆ LOẠI 1: Đặt ẩn phụ dạng 1 (Đặt ẩn phụ hoàn toàn)

1) Phương pháp

Phương pháp dùng ẩn phụ dạng 1 là việc sử dụng 1 ẩn phụ để chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với 1 ẩn phụ.

Cần lưu ý các phép đặt ẩn phụ thường gặp sau:

a) Đối với phương trình mũ

- *Dạng 1:* Phương trình $\alpha a^{2x} + \beta a^x + \gamma = 0.$

Đặt $t = a^x > 0$. Khi đó ta được phương trình bậc hai ẩn t: $\alpha t^2 + \beta t + \gamma = 0.$

Mở rộng: Phương trình $\alpha_k a^{kx} + \alpha_{k-1} a^{(k-1)x} + ... + \alpha_1 a^x + \alpha_0 = 0$

Đặt $t = a^x > 0$. Khi đó ta được phương trình ẩn t: $\alpha_k t^k + \alpha_{k-1} t^{k-1} + ... + \alpha_1 t + \alpha_0 = 0.$

Chú ý: Nếu đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp: t > 0.

Khi đó: $a^{2f(x)} = t^2, a^{3f(x)} = t^3, ..., a^{kf(x)} = t^k$ và $a^{-f(x)} = \dfrac{1}{a^{f(x)}}.$

- *Dạng 2:* Phương trình $\alpha_1 a^x + \alpha_2 b^x + \alpha_3 = 0$ với a.b = 1.

Đặt $t = a^x > 0 \Rightarrow b^x = \dfrac{1}{t}.$ Khi đó ta được phương trình:

$\alpha_1 t + \dfrac{\alpha_2}{t} + \alpha_3 = 0 \Leftrightarrow \alpha_1 t^2 + \alpha_3 t + \alpha_2 = 0$

Mở rộng: Với a.b = 1 thì khi đặt $t = a^{f(x)}$, điều kiện hẹp t > 0 thì $b^{f(x)} = \frac{1}{t}$.

- *Dạng 3:* Phương trình $\alpha_1 a^{2x} + \alpha_2 (ab)^x + \alpha_3 b^{2x} = 0$.

Chia cả 2 vế của phương trình cho $b^{2x} > 0$ (hoặc $a^{2x}, (ab)^{2x}$), ta được:

$$\alpha_1 \left(\frac{a}{b}\right)^{2x} + \alpha_2 \left(\frac{a}{b}\right)^x + \alpha_3 = 0.$$

Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^x > 0$, ta được: $\alpha_1 t^2 + \alpha_2 t + \alpha_3 = 0$.

Mở rộng: Với phương trình mũ có chứa các nhân tử: $a^{2f(x)}, b^{2f(x)}, (ab)^{2f(x)}$, ta thực hiện theo các bước sau:

- Chia cả 2 vế của phương trình cho $b^{2f(x)}$ (hoặc $a^{2f(x)}, (ab)^{f(x)}$).
- Đặt $t = \left(\frac{a}{b}\right)^{2f(x)}$, điều kiện hẹp t > 0.

- *Dạng 4:* Lượng giác hóa

Sử dụng các công thức lượng giác:

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1, \tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}, \cot^2 x + 1 = \frac{1}{\tan^2 x}, \tan 2x = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}, \ldots$$

Chú ý: Ta sử dụng ngôn từ điều kiện hẹp t > 0 cho trường hợp đặt $t = a^{f(x)}$, vì:

- Nếu đặt $t = a^x$ thì t > 0 là điều kiện đúng.
- Nếu đặt $t = 2^{x^2+3}$ thì t > 0 chỉ là điều kiện hẹp, vì thực chất $t \ge 2^3 = 8$.

Điều kiện này đặc biệt quan trong trong các bài toán có chứa tham số.

b) Đối với phương trình logarit

- *Dạng 1:* Nếu đặt $t = \log_a x$ với x > 0 thì: $\log_a^k x = t^k; \log_x a = \frac{1}{t}$ với $0 < x \ne 1$.

- *Dạng 2:* Ta biết rằng: $a^{\log_b c} = c^{\log_b a}$ nên đặt $t = a^{\log_b x}$ thì $t = x^{\log_b a}$. Tuy nhiên trong nhiều bài toán có chứa $a^{\log_b x}$, ta thường đặt ẩn phụ dẫn với $t = \log_b x$.

2) Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Nghiệm của phương trình $2.16^x - 15.4^x - 8 = 0$ là:

(A) x = 8; **(B)** $x = -\frac{1}{2}$; **(C)** $x = \frac{3}{2}$; **(D)** x = 3.

Giải:

Đặt $t = 4^x > 0 \Rightarrow 16^x = (4^x)^2 = t^2$.

Phương trình trở thành: $2t^2 - 15t - 8 = 0 \Leftrightarrow t = 8 \Leftrightarrow 2^{2x} = 2^3 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$.

Chọn (C).

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập biểu thức $2.16^x - 15.4^x - 8$

CALC với các giá trị $x = 8; x = -\frac{1}{2}; x = \frac{3}{2}; x = 3$ ta thấy với $x = \frac{3}{2}$ biểu thức đã cho bằng 0. Như vậy nghiệm của phương trình là: $x = \frac{3}{2}$.

Bài tập 2 Nghiệm của phương trình $4^{\cos 2x} + 4^{\cos^2 x} - 3 = 0$ là:

(A) $x = 2$; **(B)** $x = 1$; **(C)** $x = \frac{\pi}{2} + k\pi$; **(D)** $x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 4^{2\cos^2 x} + 4.4^{\cos^2 x} - 12 = 0$.

Đặt $t = 4^{\cos^2 x} > 0$, ta có phương trình: $t^2 + 4t - 12 = 0 \Leftrightarrow t = 2$.

Khi đó $2^{2\cos^2 x} = 2 \Leftrightarrow 2\cos^2 x = 1 \Leftrightarrow \cos 2x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: +) $t > 0$ là điều kiện hẹp, còn điều kiện đúng là: $1 \le t \le 4$, vì $0 \le \cos^2 x \le 1$.

+) Công thức lượng giác cần nhớ: $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ (công thức nhân đôi của hàm cos)

Bài tập 3 Số nghiệm của phương trình $\left(5+\sqrt{24}\right)^x + \left(5-\sqrt{24}\right)^x = 10$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: $\left(5+\sqrt{24}\right)\left(5-\sqrt{24}\right) = 1 \Rightarrow \left(5+\sqrt{24}\right)^x\left(5-\sqrt{24}\right)^x = 1$.

Đặt $t = \left(5+\sqrt{24}\right)^x > 0 \Rightarrow \left(5-\sqrt{24}\right)^x = \frac{1}{t}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$t + \frac{1}{t} = 10 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 1 = 0 \Leftrightarrow t = 5 \pm \sqrt{24}$.

+ Với $t = 5 + \sqrt{24}$ thì $\left(5+\sqrt{24}\right)^x = 5 + \sqrt{24} \Leftrightarrow x = 1$.

+ Với $t = 5 - \sqrt{24}$ thì $\left(5+\sqrt{24}\right)^x = 5 - \sqrt{24} = \left(5+\sqrt{24}\right)^{-1} \Leftrightarrow x = -1$.

Vậy phương trình đã cho có hai nghiệm x = 1 và x = -1. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 4 Số nghiệm của phương trình $6.9^x - 13.6^x + 6.4^x = 0$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Ta thấy: $9 = 3^2; 4 = 2^2; 6 = 2.3$. Chia 2 vế của phương trình cho 4^x ta được:

$$6\left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 13.\left(\frac{3}{2}\right)^x + 6 = 0.$$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^x>0$, ta được phương trình: $6t^2-13t+6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=\frac{3}{2}\\t=\frac{2}{3}\end{array}\right.$.

+ Với $t=\frac{3}{2}$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{3}{2}\Leftrightarrow x=1.$

+ Với $t=\frac{2}{3}$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^x=\frac{2}{3}=\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\Leftrightarrow x=-1.$

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 1 và x = -1.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Ta có thể chia cả hai vế của phương trình cho 9^x hoặc 6^x thay vì chia cả hai vế của phương trình cho 4^x.

Tập nghiệm của phương trình $2(\log_2 x+1)\log_4 x+\log_2\frac{1}{4}=0$ là:

(A) $\{-2\}$; **(B)** $\{-2;1\}$;(**C)** $\left\{\frac{1}{4}\right\}$; **(D)** $\left\{2;\frac{1}{4}\right\}$.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Khi đó, phương trình $\Leftrightarrow(\log_2 x+1)\log_2 x-2=0.$

Đặt $t=\log_2 x,$ ta có:

$$t^2+t-2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\log_2 x=1\\\log_2 x=-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=2\\x=\frac{1}{4}\end{array}\right..$$

So sánh với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là $\left\{2;\frac{1}{4}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tập nghiệm của phương trình $(2-\log_3 x)\log_{9x}3-\frac{4}{1-\log_3 x}=1$ là:

(A) $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; **(B)** $\{4\}$; **(C)** $\{-1;4\}$; **(D)** $\left\{\frac{1}{3};81\right\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\9x\neq 1\\\log_3 x\neq 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\x\neq\frac{1}{9};x\neq 3\end{cases}.$

Khi đó, phương trình $\Leftrightarrow\frac{2-\log_3 x}{\log_3(9x)}-\frac{4}{1-\log_3 x}=1\Leftrightarrow\frac{2-\log_3 x}{2+\log_3 x}-\frac{4}{1-\log_3 x}=1$

Đặt $t=\log_3 x\ (t\neq-2;t\neq 1)$

Ta có: $\frac{2-t}{2+t}-\frac{4}{1-t}=1 \Leftrightarrow t^2-3t-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=-1 \\ \log_3 x=4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\frac{1}{3} \\ x=81 \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, ta có tập nghiệm của phương trình là $\left\{\frac{1}{3};81\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 7 Cho phương trình $\log_3\left(3^x-1\right)\log_3\left(3^{x+1}-3\right)=6$. Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(A) Phương trình có hai hai nghiệm phân biệt trái dấu.

(B) Phương trình có 1 nghiệm nguyên.

(C) $x=\log_3 10$ là nghiệm của phương trình.

(D) $x=\log_3\frac{28}{27}$ là nghiệm của phương trình.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 3^x-1>0 \\ 3^{x+1}-3>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>0.$

Ta có: $\log_3\left(3^x-1\right)\log_3\left(3^{x+1}-3\right)=6 \Leftrightarrow \log_3\left(3^x-1\right)\log_3\left[3\left(3^x-1\right)\right]=6$

$\Leftrightarrow \log_3\left(3^x-1\right)\left[1+\log_3\left(3^x-1\right)\right]=6$

Đặt $t=\log_3\left(3^x-1\right)$, ta có:

$$t(t+1)=6 \Leftrightarrow t^2+t-6=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=-3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3\left(3^x-1\right)=2 \\ \log_3\left(3^x-1\right)=-3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x-1=9 \\ 3^x-1=\frac{1}{27} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3^x=10 \\ 3^x=\frac{28}{27} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\log_3 10 \\ x=\log_3\frac{28}{27} \end{array}\right..$$

So sánh với điều kiện, ta có phương trình có 2 nghiệm vô tỉ dương là: $x=\log_3 10$ và $x=\log_3\frac{28}{27}$.

Vậy (a) và (b) sai, (c) và (d) đúng. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 8 Cho phương trình $-\log^3 x+2\log^2 x=2-\log x$. Có bao nhiêu khẳng định SAI trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(A) Phương trình có 3 nghiệm phân biệt.

(B) Phương trình có 3 nghiệm phân biệt lập thành 1 cấp số nhân.

(C) $x = 100$ là nghiệm của phương trình.

(D) $x = \frac{1}{10}$ là nghiệm của phương trình.

Giải:

Điều kiện: $x > 0$. Đặt $t = \log x$. Khi đó, phương trình đã cho trở thành:

$$t^3 - 2t^2 - t + 2 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+1)(t-2) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -1. \\ t = 2 \end{array}\right.$$

+ Với t = 1 thì $\log x = 1 \Leftrightarrow x = 10^1 = 10$.

+ Với t = -1 thì $\log x = -1 \Leftrightarrow x = 10^{-1} = \frac{1}{10}$.

+ Với t = 2 thì $\log x = 2 \Leftrightarrow x = 10^2 = 100$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: x = 10; $x = \frac{1}{10}$ và x = 100; các nghiệm này không lập thành 1 cấp số nhân.

$\Rightarrow$ Các khẳng định (a), (c), (d) đúng; (b) sai. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 9 Tập nghiệm của phương trình $9^{-x^2+2x+1} - 34.15^{2x-x^2} + 25^{2x-x^2+1} = 0$ là:

(A) $S = \left\{1; \frac{29}{5}\right\}$; **(B)** $S = \left\{0; 2; 3 \pm \sqrt{3}\right\}$; **(C)** $S = \left\{0; 2; 1 \pm \sqrt{3}\right\}$; **(D)** $S = \{0; 2\}$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 9.9^{2x-x^2} - 34.15^{2x-x^2} + 25.25^{2x-x^2} = 0$

$$\Leftrightarrow 9\left(\frac{3}{5}\right)^{2(2x-x^2)} - 34\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} + 25 = 0$$

Đặt $t = \left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} > 0$. Khi đó phương trình trở thành: $9t^2 - 34t + 25 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = \frac{25}{9} \end{array}\right.$.

+ Với t = 1 thì $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} = 1 \Leftrightarrow 2x - x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$.

+ Với $t = \frac{25}{9}$ thì $\left(\frac{3}{5}\right)^{2x-x^2} = \left(\frac{3}{5}\right)^{-2} \Leftrightarrow x^2 - 2x - 2 = 0 \Leftrightarrow x = 1 \pm \sqrt{3}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $S = \left\{0; 2; 1 \pm \sqrt{3}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 10 Số nghiệm dương của phương trình $125^x + 50^x = 2^{3x+1}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 5^{3x}+5^{2x}.2^{x}-2.2^{3x}=0 \Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{3x}+\left(\frac{5}{2}\right)^{2x}-2=0$

Đặt $t=\left(\frac{5}{2}\right)^{x}>0$. Khi đó phương trình trở thành:

$t^3+t^2-2=0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+2t+2)=0 \Leftrightarrow t=1.$

Với t = 1 thì $\left(\frac{5}{2}\right)^{x}=1 \Leftrightarrow x=0.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=0$ là số không âm, không dương. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 11 Cho phương trình $\left(5-\sqrt{21}\right)^{x}+7.\left(5+\sqrt{21}\right)^{x}=2^{x+3}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào là SAI?

(A) Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

(B) $x=0$ là nghiệm của phương trình.

(C) $x=\log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}7$ là nghiệm của phương trình.

(D) Phương trình có hai nghiệm dương phân biệt.

Giải:

Từ $\left(5-\sqrt{21}\right)\left(5+\sqrt{21}\right)=5^2-21=4 \Rightarrow \frac{5+\sqrt{21}}{2}=\frac{2}{5-\sqrt{21}}$. Chia cả 2 vế của phương trình cho 2^x ta được phương trình:

$$\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{x}+7.\left(\frac{5+\sqrt{21}}{2}\right)^{x}=8.$$

Đặt $t=\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{x}>0$. Khi đó phương trình trở thành:

$$t+\frac{7}{t}-8=0 \Leftrightarrow t^2-8t+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=7 \end{array}\right..$$

+ Với t = 1 thì $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{x}=1 \Leftrightarrow x=0$

+ Với t = 7 thì $\left(\frac{5-\sqrt{21}}{2}\right)^{x}=7 \Leftrightarrow x=\log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}7.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x=0$ và $x=\log_{\frac{5-\sqrt{21}}{2}}7<0$

Do đó khẳng định (D) sai, các khẳng định còn lại đúng $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập [illegible] Số họ nghiệm của phương trình $4^{\cot^2 x}+2^{\frac{1}{\sin^2 x}}-3=0$ là:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Điều kiện: $\sin x \neq 0 \Leftrightarrow x \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$ $(*)$

Vì $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x$ nên phương trình được viết thành:

$4^{\cot^2 x}+2.2^{\cot^2 x}-3=0$ (1). Đặt $t=2^{\cot^2 x}\geq 1$. Khi đó phương trình

(1) được viết thành: $t^2+2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-3 \end{array}\right.$. So sánh với điều kiện

$\Rightarrow t=1 \Leftrightarrow 2^{\cot^2 x}=1 \Leftrightarrow \cot^2 x=0 \Leftrightarrow x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$ (thỏa mãn (*)).

Vậy phương trình có một họ nghiệm: $x=\frac{\pi}{2}+k\pi, k \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Các công thức lượng giác: $\frac{1}{\sin^2 x}=1+\cot^2 x; \frac{1}{\cos^2 x}=1+\tan^2 x$.

Bài tập [illegible] Số nghiệm không dương của phương trình $\left(\frac{5^x+5^{-x}}{2}\right)^2-2.\frac{5^x+5^{-x}}{2}+1=0$ là:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Đặt $t=\frac{5^x+5^{-x}}{2}\geq\sqrt{5^x.5^{-x}}=1$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1$ (Thỏa mãn)

Với t = 1 thì $\frac{5^x+5^{-x}}{2}=1 \Leftrightarrow 5^x+5^{-x}=2 \Leftrightarrow 5^x+\frac{1}{5^x}=2$.

Theo bất đẳng thức Cô-Si ta có: $5^x+\frac{1}{5^x}\geq 2\sqrt{5^x.\frac{1}{5^x}}=2=VP$. Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 5^x=\frac{1}{5^x} \Leftrightarrow 5^{2x}=1=5^0 \Leftrightarrow 2x=0 \Leftrightarrow x=0$

Vậy x = 0 là nghiệm duy nhất và không dương của phương trình đã cho. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập [illegible] Tập nghiệm của phương trình $\frac{1}{4+\log_3 x}+\frac{1}{2-\log_3 x}=1$ là:

(A) $\{-1;-2\}$; (B) $\left\{\frac{1}{2}\right\}$; (C) $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{16}\right\}$; (D) $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ 4+\log_2 x\neq 0. \\ 2-\log_2 x\neq 0 \end{cases}$

Đặt $t=\log_2 x$ thì điều kiện của t là $t\ne -4; t\ne 2$ và khi đó phương trình trở thành:

$$\frac{1}{4+t}+\frac{1}{2-t}=1\Leftrightarrow 2-t+4+t=(4+t)(2-t)\Leftrightarrow t^2+3t-2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-2 \end{array}\right. \text{(thỏa mãn)}$$

+ Với t = -1 thì $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=2^{-1}=\frac{1}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện)

+ Với t = -2 thì $\log_2 x=-2\Leftrightarrow x=2^{-2}=\frac{1}{4}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{\frac{1}{2};\frac{1}{4}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

[illegible] Tập nghiệm của phương trình $\log_{2x-1}\left(2x^2+x-1\right)+\log_{x+1}(2x-1)^2=4$ là:

(A) $\{2\}$; **(B)** $\{1;2\}$; **(C)** $\left\{\frac{5}{4}\right\}$; **(D)** $\left\{2;\frac{5}{4}\right\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0<2x-1\ne 1 \\ 2x^2+x-1>0 \\ 0<x+1\ne 1 \\ (2x-1)^2>0 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x>\frac{1}{2} \\ x\ne 1 \end{cases}\Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\ne 1.$

Khi đó, phương trình $\Leftrightarrow \log_{2x-1}(2x-1)(x+1)+\log_{x+1}(2x-1)^2=4$

$\Leftrightarrow 1=\log_{2x-1}(x+1)+2\log_{x+1}(2x-1)=4 \quad (1)$

Đặt $t=\log_{2x-1}(x+1)\Rightarrow \log_{x+1}(2x-1)=\frac{1}{\log_{2x-1}(x+1)}=\frac{1}{t}$

Khi đó (1) trở thành: $1+t+\frac{2}{t}=4\Leftrightarrow t^2-3t+2=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right.$

+ Với t = 1 thì $\log_{2x-1}(x+1)=1\Leftrightarrow x+1=2x-1\Leftrightarrow x=2$ (thỏa mãn)

+ Với t = 2 thì $\log_{2x-1}(x+1)=2\Leftrightarrow (2x-1)^2=x+1\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \ (L) \\ x=\frac{5}{4} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là: $\left\{2;\frac{5}{4}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Điều kiện để hàm số $\log_{f(x)} g(x)$ xác định là: $\begin{cases} 0<f(x)\ne 1 \\ g(x)>0 \end{cases}$.

[illegible] Số nghiệm của phương trình $x\log_2\left(4^{\frac{1}{x}}-2\right)=1$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $x\ne 0$.

Khi đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2\left(4^{\frac{1}{x}}-2\right)=\frac{1}{x}\Leftrightarrow 4^{\frac{1}{x}}-2=2^{\frac{1}{x}}\Leftrightarrow 2^{\frac{2}{x}}-2^{\frac{1}{x}}-2=0$

Đặt $t = 2^{\frac{1}{x}} > 0$, khi đó ta có phương trình: $t^2 - t - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \text{ (L)} \\ t = 2 \end{array}\right.$

Với t = 2 thì $2^{\frac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$ (Thỏa mãn)

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất là: x = 1. ⇒ **Chọn (A).**

Bài tập 17 Tập nghiệm của phương trình $\log_{\frac{x}{2}} x^2 - 14\log_{16x} x^3 + 40\log_{4x} \sqrt{x} = 0$ là:

(A) $\{1\}$; **(B)** $\{1;4\}$; **(C)** $\{1;4;\sqrt{2}\}$; **(D)** $\left\{1;4;\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 > 0 \\ 0 < \frac{x}{2} \neq 1 \\ x^3 > 0 \\ 0 < 16x \neq 1 \\ x > 0 \\ 0 < 4x \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 2 \\ x \neq \frac{1}{16} \\ x \neq \frac{1}{4} \end{cases}$.

Đặt $x = 2^t \Rightarrow t \neq 1; -2; -4$ thì phương trình đã cho trở thành: $\frac{2t}{t-1} - 14.\frac{3t}{t+4} + 40.\frac{\frac{1}{2}t}{2+t} = 0$

$\Leftrightarrow -10t\left(2t^2 - 3t - 2\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 0 \\ t = 2 \\ t = -\frac{1}{2} \end{array}\right.$ (Thỏa mãn)

+ Với t = 0 thì $\log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

+ Với t = 2 thì $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$.

+ Với $t = -\frac{1}{2}$ thì $\log_2 x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{1;4;\frac{1}{\sqrt{2}}\right\}$. ⇒ **Chọn (D).**

C. Tăng tốc

Bài tập 18 Tập nghiệm của phương trình $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x - 3\left(2-\sqrt{3}\right)^x + 2 = 0$ có số phần tử là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta thấy: $7+4\sqrt{3} = \left(2+\sqrt{3}\right)^2; \left(2+\sqrt{3}\right)\left(2-\sqrt{3}\right) = 1$.

Đặt $t = \left(2+\sqrt{3}\right)^x > 0$ thì $\left(2-\sqrt{3}\right)^x = \frac{1}{t}$ và $\left(7+4\sqrt{3}\right)^x = t^2$.

Khi đó phương trình trở thành:

$$t^2 - \frac{3}{t} + 2 = 0 \Leftrightarrow t^3 + 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow (t-1)(t^2+t+3) = 0 \Leftrightarrow t = 1$$

Với $t = 1$ thì $\left(2+\sqrt{3}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{0\}$ có 1 phần tử. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 19 Tập nghiệm của phương trình $2^{3x} - 6.2^x - \frac{1}{2^{3(x-1)}} + \frac{12}{2^x} = 1$ có số phần tử là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \left(2^{3x} - \frac{2^3}{2^{3x}}\right) - 6\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = 1 \quad (1)$

Đặt $t = 2^x - \frac{2}{2^x} \Rightarrow 2^{3x} - \frac{2}{2^{3x}} = \left(2^x - \frac{2}{2^x}\right)^2 + 3.2^x\left(2^x - \frac{2}{2^x}\right) = t^3 + 6t.$

Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^3 + 6t - 6t = 1 \Leftrightarrow t = 1 \Leftrightarrow 2^x - \frac{2}{2^x} = 1 \quad (2)$

Đặt $u = 2^x > 0$. Khi đó phương trình (2) trở thành:

$$u - \frac{2}{u} = 1 \Leftrightarrow u^2 - u - 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = -1 \ (L) \\ u = 1 \end{array}\right. \Rightarrow u = 2 \Leftrightarrow 2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $S = \{1\}$ có 1 phần tử. **Chọn (B).**

Bài tập 20 Số nghiệm của phương trình $4^{\log(10x)} - 6^{\log x} = 2.3^{\log(100x^2)}$ là:

(A) Lớn hơn 1. **(B)** Bằng 1.

(C) Lớn hơn 2. **(D)** Không nhỏ hơn 2.

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow 4^{1+\log x} - 6^{\log x} = 2.3^{\log(100x^2)}$

$\Leftrightarrow 4.4^{\log x} - 6^{\log x} = 2.3^{2+2\log x}$

$\Leftrightarrow 4.\left(\frac{4}{9}\right)^{\log x} - \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} - 18 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} > 0 \Rightarrow$ Phương trình trở thành: $4t^2 - t - 18 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -2 \ (L) \\ t = \frac{9}{4} \end{array}\right.$

Với $t = \frac{9}{4}$ thì $\left(\frac{2}{3}\right)^{\log x} = \frac{9}{4} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-2} \Leftrightarrow \log x = -2 \Leftrightarrow x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

So sánh với điều kiện, suy ra nghiệm duy nhất của phương trình đã cho là: $x = \frac{1}{100}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 21 Tập nghiệm của phương trình $x^{\log^2 x^2 - 3\log x - \frac{9}{2}} = 10^{-2\log x}$ là:

(A) $\left\{\frac{5}{4}\right\}$; (B) $\left\{\frac{1}{10}\right\}$; (C) $\left\{\sqrt[4]{10^5}\right\}$; (D) $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}; \sqrt[4]{10^5}\right\}$.

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^{\log^2 x^2 - 3\log x - \frac{9}{2}} = \left(10^{\log x}\right)^{-2} = x^{-2}$

$\Leftrightarrow \log^2 x^2 - 3\log x - \frac{9}{2} = -2 \Leftrightarrow 8\log^2 x - 6\log x - 5 = 0.$

Đặt $t = \log x$ thì phương trình trở thành: $8t^2 - 6t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -\frac{1}{2} \\ t = \frac{5}{4} \end{array}\right.$.

+ Với $t = -\frac{1}{2}$ thì $\log x = -\frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{1}{\sqrt{10}}$.

+ Với $t = \frac{5}{4}$ thì $\log x = \frac{5}{4} \Leftrightarrow x = \sqrt[4]{10^5}$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{\frac{1}{\sqrt{10}}; \sqrt[4]{10^5}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 22 Cho phương trình $\log_2 \sqrt{|x|} - 4\sqrt{\log_4 |x|} - 5 = 0$. Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; (B) 2; (C) 3; (D) 4.

(A) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

(B) Phương trình có nghiệm duy nhất $x = 2^{50}$.

(C) Phương trình có hai nghiệm phân biệt $x = \pm 50^2$.

(D) $x = -2^{50}$ là nghiệm của phương trình.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ \log_2 |x| \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow |x| \geq 1$. Phương trình đã cho tương đương với:

$$\log_2 |x|^{\frac{1}{2}} - 4\sqrt{\log_{2^2} |x|} - 5 = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\log_2 |x| - 4\sqrt{\frac{1}{2}\log_2 |x|} - 5 = 0$$

Đặt $t = \sqrt{\frac{1}{2}\log_2 |x|}$ $(t \geq 0)$ thì phương trình trở thành:

$t^2 - 4t - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = 5 \end{array}\right.$.

Do $t \geq 0$ nên $t = 5 \Rightarrow \frac{1}{2}\log_2 |x| = 25 \Leftrightarrow \log_2 |x| = 50 \Leftrightarrow |x| = 2^{50} \Leftrightarrow x = \pm 2^{50}$.

Vậy $x = \pm 2^{50}$ là nghiệm của phương trình.

$\Rightarrow$ (a), (d) đúng; (b), (c) sai. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{1+\sqrt{1-2^{2x}}}=\left(1+2\sqrt{1-2^{2x}}\right).2^x$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $1-2^{2x}\ge 0 \Leftrightarrow 2^{2x}\le 1 \Leftrightarrow x\le 0 \Rightarrow 0<2^x\le 1.$

Đặt $2^x=\sin t,\ t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right]$. Khi đó phương trình có dạng:

$$\sqrt{1+\sqrt{1-\sin^2 t}}=\sin t\left(1+2\sqrt{1-\sin^2 t}\right)\Leftrightarrow \sqrt{1+\cos t}=(1+2\cos t)\sin t$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=\sin t+\sin 2t \Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}=2\sin\frac{3t}{2}\cos\frac{t}{2}\Leftrightarrow \sqrt{2}\cos\frac{t}{2}\left(1-\sqrt{2}\sin\frac{3t}{2}\right)=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\cos\dfrac{t}{2}=0\ (L)\\ \sin\dfrac{3t}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}t=\dfrac{\pi}{6}\\ t=\dfrac{\pi}{2}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}2^x=\dfrac{1}{2}\\ 2^x=1\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=0\end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm x = -1 và x = 0. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Bài này ta đã sử dụng phương pháp lượng giác hóa. Để ý: Vì $\sin^2 t+\cos^2 t=1$ nên nếu đặt $2^x=\sin t,\ t\in\left(0;\dfrac{\pi}{2}\right)$ thì $\sqrt{1-e^{2x}}=\cos t$ hoặc ta có thể đặt $2^x=\cos t$.

Tìm m để phương trình $4^x-m.2^{x-1}+2m=0$ có 2 nghiệm x_1,x_2 sao cho $x_1+x_2=3$.

(A) $m>2$; **(B)** $m<0$; **(C)** $m=8$; **(D)** $m=4$.

Giải:

Đặt $t=2^x>0$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $t^2-2mt+2m=0$ (1)

Phương trình đã cho có 2 nghiệm x_1,x_2 thỏa mãn: $x_1+x_2=3 \Leftrightarrow$ Phương trình (1) có 2 nghiệm dương phân biệt $t_1=2^{x_1},t_2=2^{x_2}$ thỏa mãn:

$$t_1t_2=2^{x_1}.2^{x_2}=2^{x_1+x_2}=2^3=8\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'>0\\ S>0\\ P=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m(m-2)>0\\ 2m>0\\ 2m=8\end{cases}\Leftrightarrow m=4.$$

Vậy m cần tìm là: m = 4. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tìm m để phương trình: $\log\left(x^2+mx\right)-\log(x-3)=0$ (1) có nghiệm.

(A) $m<-3$; **(B)** $m\in\mathbb{R}$; **(C)** $m<3$; **(D)** $m>3$.

Giải:

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \log\left(x^2+mx\right)=\log\left(x-3\right)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-3>0 \\ x^2+mx=x-3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ -x^2+x-3=mx \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>3 \\ -x+1-\dfrac{3}{x}=m \end{cases}$$

Xét hàm số: $f\left(x\right)=-x+1-\dfrac{3}{x},\ x>3$

Ta có: $f'\left(x\right)=-1+\dfrac{3}{x^2}<0\ \forall x>3 \Rightarrow$ f(x) là hàm số nghịch biến $\forall x>3$

Yêu cầu của bài toán $\Leftrightarrow m<f\left(3\right) \Leftrightarrow m<-3. \Rightarrow$ **Chọn (A).**

D. Về đích

Bài tập 26. Cho phương trình: $\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x+a\left(\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^x=8$. Tìm a để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

(A) $-2<a<16$; **(B)** $a=16$; **(C)** $a<16$; **(D)** $-2\le a<16$.

Giải:

Đặt $t=\left(\dfrac{7+3\sqrt{5}}{2}\right)^x>0$ thì phương trình đã cho trở thành: $t+\dfrac{a}{t}=8 \Leftrightarrow t^2-8t+a=0$.

Số nghiệm của phương trình đã cho chính bằng số nghiệm dương của phương trình: $a=-t^2+8t$.

Xét sự biến thiên của hàm số $f\left(t\right)=-t^2+8t$ trên $\left(0;+\infty\right)$.

Ta có: $f'\left(t\right)=-2t+8=0 \Leftrightarrow t=4$.

Bảng biến thiên:

t	0		4		$+\infty$
f'(t)		+	0	-	
f(t)	-2	↗	16	↘	$-\infty$

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt thì $-2\le a<16. \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 27. Cho phương trình: $\left(2m+3\right).25^x-\left(4m-2\right).5^x+3m-8=0$. Tìm m để phương trình có hai nghiệm trái dấu.

(A) $-\dfrac{3}{2}\le m\le 3$; **(B)** $-\dfrac{3}{2}<m<3$;

(C) $m>3$ hoặc $m<-\dfrac{3}{2}$; **(D)** Không có giá trị của m.

Giải:

Đặt $t = 5^x > 0$.

Phương trình trở thành: $(2m+3)t^2 - (4m-2)t + 3m - 8 = 0 \ (1)$

Giả sử phương trình đầu có 2 nghiệm trái dấu $x_1 < 0 < x_2$. Khi đó ta có:

$x_1 < 0 < x_2 \Leftrightarrow 5^{x_1} < 5^0 < 5^{x_2} \Leftrightarrow t_1 < 1 < t_2$, với t_1, t_2 là nghiệm của phương trình (1).

Do đó phương trình đầu có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ phương trình (1) có 2 nghiệm $t_1 < 1 < t_2$.

Đặt $f(t) = (2m+3)t^2 - (4m-2)t + 3m - 8$.

Phương trình (2) có 2 nghiệm

$t_1 < 1 < t_2 \Leftrightarrow af(1) < 0 \Leftrightarrow (2m+3)\left[(2m+3).1^2 + 3m - 8\right] < 0$

$\Leftrightarrow (2m+3)(m-3) < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{3}{2} < m < 3. \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Từ điều kiện của ẩn ta cần phải tìm điều kiện của ẩn phụ.

Bài tập 28: Cho phương trình: $\log_2(5^x - 1).\log_4(2.5^x - 2) = m \ (1)$. Xác định m để phương trình có nghiệm $x \geq 1$.

(A) $m \leq 3$; **(B)** $m < 3$; **(C)** $m \geq 3$; **(D)** $m > 3$.

Giải:

Biến đổi phương trình về dạng:

$\dfrac{1}{2}\log_2(5^x - 1).\log_2\left[2.(5^x - 1)\right] = m \Leftrightarrow \log_2(5^x - 1).\left[1 + \log_2(5^x - 1)\right] = 2m$

Điều kiện: $5^x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 0$.

Đặt $t = \log_2(5^x - 1)$. Khi đó phương trình có dạng:

$t(1+t) = 2m \Leftrightarrow f(t) = t^2 + t - 2m = 0 \ (2)$

Với $x \geq 1$ thì $5^x - 1 \geq 5 - 1 = 4 \Rightarrow \log_2(5^x - 1) \geq \log_2 4 \Leftrightarrow t \geq 2$.

Vậy để phương trình (1) có nghiệm $x \geq 1$ thì phương trình (2) có nghiệm

$t \geq 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2 \leq t_1 \leq t_2 \ \ (L) \\ t_1 \leq 2 \leq t_2 \end{array}\right. \Leftrightarrow a.f(2) \leq 0 \Leftrightarrow 4 + 2 - 2m \leq 0 \Leftrightarrow m \geq 3.$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 29: Cho phương trình $\log_2\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right).\log_3\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = \log_6\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right)$. Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định sau?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(A) Phương trình có hai nghiệm phân biệt.

(B) $x = 1$ là nghiệm của phương trình.

(C) Phương trình có hai nghiệm phân biệt trái dấu.

(D) $x=\frac{1}{2}\left(3^{\log_6 2}+3^{-\log_6 2}\right)$ là nghiệm của phương trình.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2-1\ge 0 \\ x-\sqrt{x^2-1}>0 \\ x+\sqrt{x^2-1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\ge 1.$

Ta thấy: $\left(x-\sqrt{x^2-1}\right)\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1 \Rightarrow \left(x-\sqrt{x^2-1}\right)=\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}$

Khi đó phương trình được viết dưới dạng:

$\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}.\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)^{-1}$

$\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

Sử dụng phép biến đổi cơ số: $\log_2\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_2 6.\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

và $\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_3 6.\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$

Khi đó phương trình được viết dưới dạng:

$\log_2 6.\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right).\log_3 6.\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$ (1)

Đặt $t=\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)$. Khi đó (1) trở thành:

$t\left(\log_2 6.\log_3 6.t-1\right)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=0 \\ \log_2 6.\log_3 6.t-1=0 \end{array}\right.$

+ Với $t=0$ thì $\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=1 \Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{x^2-1}=1 \\ x-\sqrt{x^2-1}=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

+ Với $\log_2 6.\log_3 6.t-1=0$ thì:

$\log_2 6.\log_3 6.\log_6\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=0 \Leftrightarrow \log_2 6.\log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=1$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x+\sqrt{x^2-1}\right)=\log_6 2 \Leftrightarrow x+\sqrt{x^2-1}=3^{\log_6 2}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+\sqrt{x^2-1}=3^{\log_6 2} \\ x-\sqrt{x^2-1}=3^{-\log_6 2} \end{cases} \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}\left(3^{\log_6 2}+3^{-\log_6 2}\right)$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x=1>0$ và $x=\frac{1}{2}\left(3^{\log_6 2}+3^{-\log_6 2}\right)>0$

$\Rightarrow$ Các khẳng định (a), (b), (d) đúng và (c) sai. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Ở bài này ta đã sử dụng phép biến đổi cơ số: $\log_a b=\log_a c.\log_c b$ để làm xuất hiện nhân tử chung.

- **LOẠI 2:** Đặt ẩn phụ dạng 2 (đặt ẩn phụ không hoàn toàn)

1) Phương pháp

Phương pháp đặt ẩn phụ dạng 2 là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 phương trình với 1 ẩn phụ nhưng các hệ số vẫn còn chứa x.

Phương pháp này thường được sử dụng với những phương trình khi lựa chọn ẩn phụ cho một biểu thức thì các biểu thức còn lại không biểu diễn được triệt để qua ẩn phụ đó hoặc nếu biểu diễn được thì công thức biểu diễn lại quá phức tạp. Khi đó ta được 1 phương trình bậc 2 theo ẩn phụ (hoặc vẫn theo ẩn x) có biệt số Δ là một số chính phương.

2) Bài tập

Số nghiệm không âm của phương trình $4^{2x} - (2^x + 9).4^x + 9.4^x = 0$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Đặt $t = 9^x > 0$. Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - (2^x + 9)t + 9.2^x = 0$ (1)

Ta có: $\Delta = (2^x + 9)^2 - 4.9.2^x = (2^x + 9)^2 \geq 0 \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm:

$$\left[\begin{array}{l} t = 9 \\ t = 2^x \end{array}\right.$$

+ Với t = 9 thì $4^x = 9 \Leftrightarrow x = \log_4 9$.

+ Với $t = 2^x$ thì $4^x = 2^x \Leftrightarrow 2^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

Vậy phương trình có 2 nghiệm không âm là: $x = \log_4 9$ và x = 0. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Số nghiệm của phương trình $\log^2 x - \log x.\log_2(4x) + 2\log_2 x = 0$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 3; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Biến đổi phương trình về dạng: $\log^2 x - (2 + \log_2 x)\log x + 2\log_2 x = 0$.

Đặt t = logx. Khi đó phương trình trở thành: $t^2 - (2 + \log_2 x).t + 2\log_2 x = 0$.

Ta có: $\Delta = (2 + \log_2 x)^2 - 8\log_2 x = (2 - \log_2 x)^2 \geq 0 \forall x > 0 \Rightarrow$ phương trình có nghiệm

$$\left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \log_2 x \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = 2 \\ \log x = \dfrac{\lg x}{\lg 2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log x = 2 \\ \log x = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 100 \\ x = 1 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: x = 100 và x = 1. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 3. Tập nghiệm của phương trình $25^{x^2}+(x^2-3)5^{x^2}-2x^2+2=0$ là:

(A) $\{0\}$; (B) $\{0;\pm\log_5 2\}$; (C) $\{0;\pm\sqrt{\log_2 5}\}$; (D) $\{0;\pm\sqrt{\log_5 2}\}$.

Giải:

Đặt $t=5^{x^2}\ge 1$. Khi đó phương trình trở thành:

$t^2+(x^2-3)t-2x^2+2=0.$

Ta có: $\Delta=(x^2-3)^2-4(-2x^2+2)=(x^2+1)^2 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} t=2 \\ t=1-x^2 \end{array}\right.$.

+ Với $t=2$ thì $5^{x^2}=2 \Leftrightarrow x^2=\log_5 2 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{\log_5 2}.$

+ Với $t=1-x^2$ thì $5^{x^2}=1-x^2$.

Ta thấy: $5^{x^2}\ge 5^0=1, 1-x^2\le 1 \Rightarrow x=0.$

Vậy phương trình có 3 nghiệm là: $x=\pm\sqrt{\log_5 2}; x=0.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 4. Số nghiệm của phương trình $\log_3^2 x+(x-1)\log_3 x+2x-6=0$ là:

(A) 2; (B) 0; (C) 1; (D) 3.

Giải:

Điều kiện: $x>0$. Đặt $t=\log_3 x$ thì phương trình trở thành:

$t^2+(x-1)t+2x-6=0.$

Ta có: $\Delta=(x-1)^2-4(2x-6)=(x-5)^2\ge 0 \Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=3-x \end{array}\right.$.

+ Với $t=-2$ thì $\log_3 x=-2 \Leftrightarrow x=3^{-2}=\frac{1}{9}$ (1)

+ Với $t=3-x$ thì $\log_3 x=3-x$. Ta thấy vế trái là hàm đồng biến, vế phải là hàm nghịch biến và x = 3 là một nghiệm của (1) nên phương trình (1) có nghiệm duy nhất x = 3.

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x=\frac{1}{9}$ và x = 3.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Ở bài này sau khi biểu diễn t theo x ta đã sử dụng tính đơn điệu của hàm số để giải phương trình như sau: Nếu $f(x)=g(x)$, f(x) là hàm số đồng biến và g(x) là hàm số nghịch biến trên miền xác định và $f(x_0)=g(x_0)$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = g(x).

C. Tăng tốc

Bài tập 5 Số nghiệm không dương của phương trình $(x+4).9^x-(x+5).3^x+1=0$ là:

(A) 2; **(B)** 1; **(C)** 0; **(D)** 3.

Giải:

Đặt $t=3^x>0 \Rightarrow$ phương trình trở thành: $(x+4)t^2-(x+5).t+1=0$ (1)

+ Nếu x + 4 = 0 $\Leftrightarrow x=-4$ thì phương trình trở thành: $-3^{-4}+1=0$ (vô lý) $\Rightarrow$ x = -4 không là nghiệm.

+ Nếu $x+4\neq 0 \Leftrightarrow x\neq -4$ thì vế trái của phương trình là tam thức bậc hai.

Ta có: $\Delta=(x+5)^2-4(x+4).1=(x+3)^2\geq 0 \Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=\dfrac{1}{x+1} \end{array}\right.$.

+ Với t = 1 thì $3^x=1\Leftrightarrow x=0$.

+ Với $t=\dfrac{1}{x+1}$ thì $3^x=\dfrac{1}{x+1}$. Ta thấy vế trái là hàm đồng biến và vế phải là hàm nghịch biến mà x = 0 là một nghiệm của phương trình nên x = 0 là nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình có nghiệm không dương duy nhất x = 0. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Cần xét các trường hợp x + 4 = 0 và $x+4\neq 0$. Khi x + 4 = 0 thì vế trái của phương trình không là tam thức bậc hai đối với ẩn t.

Bài tập 6 Nghiệm của phương trình: $(x+2)\log_5^2(x+3)+4(x+1)\log_5(x+3)-16=0$ là:

(A) $x=6$; **(B)** $x=-2$; **(C)** $x=\dfrac{1}{625}$; **(D)** $x=-\dfrac{1874}{625}$.

Giải:

Điều kiện: $x+3>0\Leftrightarrow x>-3$.

Đặt $t=\log_5(x+3)\Rightarrow$ Phương trình trở thành: $(x+2)t^2+4(x+1)t-16=0$ (1)

+ Nếu x + 2 = 0 $\Leftrightarrow$ x = -2 thì phương trình trở thành: -16 = 0 (vô lý) $\Rightarrow$ x = -2 không là nghiệm.

+ Nếu $x+2\neq 0\Leftrightarrow x\neq -2$ thì vế trái là tam thức bậc hai.

Ta có: $\Delta'=4(x+1)^2+16(x+2)=(2x+6)^2\geq 0\Rightarrow$ phương trình (1) có nghiệm $\left[\begin{array}{l} t=-4 \\ t=\dfrac{4}{x+2} \end{array}\right.$.

+ Với t = -4 thì $\log_5(x+3)=-4\Leftrightarrow x+3=5^{-4}=\dfrac{1}{625}\Leftrightarrow x=-\dfrac{1874}{625}$.

+ Với $t = \frac{4}{x+2}$ thì $\log_5(x+3) = \frac{4}{x+2}$. Ta thấy vế trái là hàm đồng biến và vế phải là hàm nghịch biến và x = 2 là 1 nghiệm nên x = 2 là nghiệm duy nhất.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $x = -\frac{1874}{625}$ và x = 2. ⇒ **Chọn (D).**

Số nghiệm của phương trình $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} + x.\left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = 1 + x^2$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 3; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Nhận xét: $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x}.\left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = 2^{\log_2 x} = x$.

Đặt $t = \left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} > 0 \Rightarrow \left(2-\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = \frac{x}{t}$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$t + \frac{x}{t} = 1 + x^2 \Leftrightarrow t^2 - \left(x^2+1\right)t + x^2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = x^2 \end{array}\right..$$

+ Với t = 1 thì $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = 1 \Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

+ Với $t = x^2$ thì $\left(2+\sqrt{2}\right)^{\log_2 x} = x^2 \Leftrightarrow \log_2 x.\log_2\left(2+\sqrt{2}\right) = 2\log_2 x$

$\Leftrightarrow \log_2 x.\left[\log_2\left(2+\sqrt{2}\right) - 2\right] = 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

So với điều kiện ta có nghiệm duy nhất của phương trình là: x = 1. ⇒ **Chọn (A).**

Tập nghiệm của phương trình $4^{x^2} + \left(x^2-7\right).2^{x^2} + 12 - 4x^2 = 0$ là:

(A) $\{\pm 1\}$; **(B)** $\{\pm 1; \pm 2\}$; **(C)** $\left\{\pm 1; \sqrt{2}\right\}$; **(D)** $\left\{\pm 1; \pm\sqrt{2}\right\}$.

Giải:

Đặt $t = 2^{x^2} > 0$. Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2 + \left(x^2-7\right).t + 12 - 4x^2 = 0$.

Ta có: $\Delta = \left(x^2-7\right)^2 - 4\left(12-4x^2\right) = \left(x^2\right)^2 + 2x^2 + 1 = \left(x^2+1\right)^2 > 0\ \forall x$

$$\Rightarrow \left[\begin{array}{l} t = \dfrac{7 - x^2 + x^2 + 1}{2} = 4 \\ t = \dfrac{7 - x^2 - x^2 - 1}{2} = 3 - x^2 \end{array}\right..$$

+ Với t = 4 thì $2^{x^2} = 4 = 2^2 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$.

+ Với $t = 3 - x^2 > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 3 - x^2 > 0 \\ 2^{x^2} = 3 - x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\sqrt{3} < x < \sqrt{3} \\ 2^{x^2} + x^2 = 3 \end{cases} \quad (2)$

Xét hàm số $f(x) = 2^{x^2} + x^2 \quad x \in \left(-\sqrt{3}; \sqrt{3}\right)$

$f'(x) = 2^{x^2}.2x.\ln 2 + 2x = 2x\left(2^{x^2} \ln 2 + 2\right) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Bảng biến thiên

x	$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	11	$\searrow$	1	$\nearrow$	11

+ Với $x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right) \Rightarrow f'(x) < 0 \Rightarrow f(x)$ nghịch biến.

$\Rightarrow$ Nếu x < -1 thì $f(x) > f(-1) = 3 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

Nếu x > -1 thì $f(x) < f(-1) = 3 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

$\Rightarrow x \in \left(-\sqrt{3}; 0\right)$ thì (2) có nghiệm duy nhất x = -1.

+ Với $x \in (0; +\infty) \Rightarrow f'(x) > 0 \Rightarrow f(x)$ đồng biến.

$\Rightarrow$ Nếu x < 1 thì $f(x) < f(1) = 3 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

Nếu x > 1 thì $f(x) > f(1) = 3 \Rightarrow (2)$ vô nghiệm.

$\Rightarrow x \in (0; +\infty)$ thì (2) có nghiệm duy nhất là x = 1.

Vậy phương trình (2) có 4 nghiệm là: $x = \pm 1; x = \pm\sqrt{2}.$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Ở trên ta đã sử dụng bảng biến thiên để biện luận số nghiệm của 1 phương trình.

◆ LOẠI 3: Đặt ẩn phụ loại 3

1) Phương pháp

- Sử dụng 2 ẩn phụ cho 2 biểu thức mũ (logarit) trong phương trình và biến đổi phương trình thành phương trình tích.

- Sử dụng k ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu về thành 1 hệ phương trình với k ẩn phụ.

+ Trong hệ mới thì k – 1 phương trình nhận được từ các mối liên hệ giữa các đại lượng tương ứng.

+ Trường hợp đặc biệt là việc sử dụng 1 ẩn phụ chuyển phương trình ban đầu thành 1 hệ phương trình với 1 ẩn phụ và 1 ẩn x, khi đó ta thực hiện theo các bước:

- *Bước 1:* Đặt điều kiện.
- *Bước 2:* Biến đổi phương trình về dạng: $f\left[x,\varphi(x)\right]=0$.
- *Bước 3:* Đặt $y=\varphi(x)$ ta biến đổi phương trình thành hệ: $\begin{cases} y=\varphi(x) \\ f(x;y)=0 \end{cases}$.

2) Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1. Số nghiệm của phương trình $5^{x^2-3x+2}+5^{x^2+6x+5}=5^{2x^2+3x+7}+1$ là:

(A) 4; **(B)** 3; **(C)** 2; **(D)** 1.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 5^{x^2-3x+2}+5^{x^2+6x+5}=5^{x^2-3x+2}.5^{x^2+6x+5}+1$.

Đặt $\begin{cases} 5^{x^2-3x+2}=u>0 \\ 5^{x^2+6x+5}=v>0 \end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành:

$u+v=uv+1 \Leftrightarrow (u-1)(1-v)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=1 \\ v=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 5^{x^2-3x+2}=1 \\ 5^{x^2+6x+5}=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-3x+2=0 \\ x^2+6x+5=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \\ x=-1 \\ x=-5 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $S=\{1;2;-1;-5\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Ở bài này ta đã đặt 2 ẩn phụ và đưa phương trình ban đầu về dạng tích để giải

$A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$.

Bài tập 2. Số nghiệm của phương trình $\log_2^2 x-\log_2 x+\log_3 x-\log_2 x.\log_3 x=0$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $\begin{cases} u=\log_2 x \\ v=\log_3 x \end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$u^2-u+v-uv=0 \Leftrightarrow u(u-1)-v(u-1)=0 \Leftrightarrow (u-v)(u-1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v \\ u=1 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=\log_3 x=\dfrac{\log_2 x}{\log_2 3} \\ \log_2 x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x=0 \\ \log_2 x=1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=2 \end{array}\right..$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x=1$ và $x=2$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nhận xét:

+ Ở bài này ta đã đặt 2 ẩn phụ và đưa phương trình ban đầu về dạng tích để giải: $A.B=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A=0 \\ B=0 \end{array}\right.$.

+ Lưu ý công thức biến đổi loga: $\log_b c = \dfrac{\log_a c}{\log_a b}$.

Bài tập 3 Tập nghiệm của phương trình $3^{2x} - \sqrt{3^x + 6} = 6$ là:

(A) $\varnothing$;

(B) $\{1\}$;

(C) $\left\{1; \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right\}$;

(D) $\left\{1; \log_3\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = 3^x > 0 \\ v = \sqrt{3^x + 6} \geq \sqrt{6} \end{cases}$.

Khi đó phương trình trở thành hệ:

$$\begin{cases} u^2 = v + 6 \\ v^2 = u + 6 \end{cases} \Rightarrow u^2 - v^2 = -(u-v) \Leftrightarrow (u-v)(u+v+1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u - v = 0 \\ u + v + 1 = 0 \end{array}\right.$$

+ Với u = v ta có: $u^2 - u - 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 3 \\ u = -2\,(L) \end{array}\right. \Rightarrow 3^x = 3 \Leftrightarrow x = 1$.

+ Với u + v + 1 = 0 ta có:

$$u^2 + u - 5 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \\ u = \dfrac{-1-\sqrt{21}}{2}\quad (L) \end{array}\right. \Rightarrow 3^x = \dfrac{-1+\sqrt{21}}{2} \Leftrightarrow x = \log_3\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right).$$

Vậy tập nghiệm của phương trình là $\left\{1; \log_3\left(\dfrac{-1+\sqrt{21}}{2}\right)\right\}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Bằng phép đặt 2 ẩn phụ phương trình ban đầu đã trở thành một hệ phương trình đối xứng đã biết cách giải.

Bài tập 4 Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) + 3\log_3\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) = 2$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 1 \geq 0 \\ x - \sqrt{x^2 - 1} > 0 \\ x + \sqrt{x^2 - 1} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \geq 1$.

Đặt $\begin{cases} u = \log_3\left(x - \sqrt{x^2 - 1}\right) \\ v = \log_3\left(x + \sqrt{x^2 - 1}\right) \end{cases}$

Ta có: $u + v = \log_3\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) + \log_3\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = \log_3\left(x - \sqrt{x^2-1}\right).\left(x - \sqrt{x^2-1}\right)$

$= \log_3 1 = 0.$

Khi đó phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} u + v = 0 \\ u + 3v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -v \\ 2v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = -1 \\ v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(x - \sqrt{x^2-1}\right) = -1 \\ \log_3\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x - \sqrt{x^2-1} = \dfrac{1}{3} \\ x + \sqrt{x^2-1} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow x = \frac{5}{3}.$$

Vậy phương trình có nghiệm là: $x = \frac{5}{3}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Bằng phép đặt 2 ẩn phụ phương trình ban đầu đã trở thành 1 hệ phương trình 2 ẩn đã biết cách giải.

Số nghiệm của phương trình $2\log_2\left(x^2 - x\right) + \log_2 x - \log_2 x.\log_2\left(x^2 - x\right) = 2$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ x^2 - x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Đặt $\begin{cases} u = \log_2 x \\ v = \log_2\left(x^2 - x\right) \end{cases}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$2v + u - uv = 2 \Leftrightarrow 2(v-1) - u(v-1) = 0 \Leftrightarrow (v-1)(2-u) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v = 1 \\ u = 2 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\left(x^2 - x\right) = 1 \\ \log_2 x = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 - x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ (L) \\ x = 2 \\ x = 4 \end{array}\right.$$

Vậy phương trình có 2 nghiệm là: $x = 2$ và $x = 4$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Số nghiệm của phương trình $\dfrac{8}{2^{x-1}+1}+\dfrac{2^x}{2^x+2}=\dfrac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{8}{2^{x-1}+1}+\dfrac{1}{2^{1-x}+1}=\dfrac{18}{2^{x-1}+2^{1-x}+2}$

Đặt: $\begin{cases} u=2^{x-1}+1>1 \\ v=2^{1-x}+1>1 \end{cases}$.

Ta có: $u.v=\left(2^{x-1}+1\right).\left(2^{1-x}+1\right)=2^{x-1}+2^{1-x}+2=u+v$

Khi đó phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{8}{u}+\dfrac{1}{v}=\dfrac{18}{u+v} \\ u+v=uv \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u+8v=18 \\ u+v=uv \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=v=2 \\ u=9;v=\dfrac{9}{8} \end{array}\right.$.

+ Với u = v = 2, ta có: $\begin{cases} 2^{x-1}+1=2 \\ 2^{1-x}+1=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=1.$

+ Với u = 9; $v=\dfrac{9}{8}$, ta có: $\begin{cases} 2^{x-1}+1=9 \\ 2^{1-x}+1=\dfrac{9}{8} \end{cases} \Leftrightarrow x=4.$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: x = 1 và x = 4. ⇒ **Chọn (C).**

Tập nghiệm của phương trình $\sqrt{3+\log_2\left(x^2-4+5\right)}+2\sqrt{5-\log_2\left(x^2-4x+5\right)}=6$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $\{1;3\}$; **(C)** $\left\{1;3;\pm\sqrt{2^{\frac{121}{25}}-1}\right\}$; **(D)** $\left\{1;3;2\pm\sqrt{2^{\frac{121}{25}}-1}\right\}$.

Giải:

Điềukiện: $\begin{cases} x^2-4x+5>0 \\ 3+\log_2\left(x^2-4x+5\right)\ge 0 \Leftrightarrow x^2-4x+5\le 2^5 \Leftrightarrow 2-\sqrt{29}\le x\le 2+\sqrt{29} \quad (*) \\ 5-\log_2\left(x^2-4x+5\right)\ge 0 \end{cases}$

Đặt $\begin{cases} u=\sqrt{3+\log_2\left(x^2-x+5\right)}\ge 0 \\ v=\sqrt{5-\log_2\left(x^2-x+5\right)}\ge 0 \end{cases}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u+2v=6 \\ u^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6-2v \\ (6-2v)^2+v^2=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6-2v \\ 5v^2-24v+28=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=6-2v \\ \left[\begin{array}{l} v=2 \\ v=\dfrac{14}{5} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} v=2;u=2 \\ v=\frac{14}{5};u=\frac{2}{5} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \sqrt{3+\log_2\left(x^2-4x+5\right)}=2 \\ \sqrt{5-\log_2\left(x^2-4x+5\right)}=2 \end{cases} \\ \begin{cases} \sqrt{3+\log_2\left(x^2-4x+5\right)}=\frac{14}{5} \\ \sqrt{5-\log_2\left(x^2-4x+5\right)}=\frac{2}{5} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2\left(x^2-4x+5\right)=1 \\ \log_2\left(x^2-4x+5\right)=\frac{121}{25} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+5=2 \\ x^2-4x+5=2^{\frac{121}{25}} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2-4x+3=0 \\ x^2-4x+5-2^{\frac{121}{25}}=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=3 \\ x=2\pm\sqrt{2^{\frac{121}{25}}-1} \end{array}\right.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

C. Tăng tốc

Bài tập 8. Tập nghiệm của phương trình $\log_3^2 x+\sqrt{\log_3 x+1}=1$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $\left\{\frac{1}{3}\right\}$; **(C)** $\left\{1;\frac{1}{3}\right\}$; **(D)** $\left\{3^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}};1;\frac{1}{3}\right\}$.

Giải:

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $u=\log_3 x$. Khi đó phương trình trở thành: $u^2+\sqrt{u+1}=1$.

Điều kiện: $\begin{cases} u+1\ge 0 \\ 1-u^2\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow -1\le u\le 1$.

Đặt $v=\sqrt{u+1}$, $0\le v\le\sqrt{2}\Rightarrow v^2=u+1$

Khi đó phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} u^2=1-v \\ v^2=1+u \end{cases} \Rightarrow u^2-v^2=-(u+v)\Leftrightarrow (u+v)(u-v+1)=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u+v=0 \\ u-v+1=0 \end{array}\right.$$

+ Với v = -u ta có: $u^2-u-1=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=\frac{1-\sqrt{5}}{2} \\ u=\frac{1+\sqrt{5}}{2}\ (L) \end{array}\right. \Rightarrow \log_3 x=\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Leftrightarrow x=3^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$.

+ Với u − v + 1 = 0 ta có: $u^2+u=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u=0 \\ u=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_3 x=0 \\ \log_3 x=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=\frac{1}{3} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{3^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}};1;\frac{1}{3}\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 9 Số nghiệm của phương trình $8^x + 1 = 2\sqrt[3]{2^{x+1} - 1}$ là:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Đặt $\begin{cases} 2^x = u > 0 \\ \sqrt[3]{2^{x+1} - 1} = v \end{cases}$. Khi đó phương trình đã cho trở thành hệ:

$$\begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ v^3 + 1 = 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u^3 + 1 = 2v \\ (u - v)(u^2 + uv + v^2 + 2) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v > 0 \\ u^3 - 2u + 1 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v > 0 \\ (u - 1)(u^2 + u - 1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \\ v = \dfrac{-1 - \sqrt{5}}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} u = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ v = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \text{. Vì } u > 0 \text{ nên } \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} u = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \\ v = \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = \log_2 \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \cdot$$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: $x = 0$ hoặc $x = \log_2 \dfrac{-1 + \sqrt{5}}{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

D. Về đích

Bài tập 10 Số nghiệm của phương trình $2^{2\sqrt{x+3} - x} - 5.2^{\sqrt{x+3}+1} + 2^{x+4} = 0$ là:

(A) 2; (B) 0; (C) 1; (D) 3.

Giải:

Ta có: $2^{2\sqrt{x+3} - x} - 5.2^{\sqrt{x+3}+1} + 2^{x+4} = 0 \Leftrightarrow 2^{2\sqrt{x+3} - x} - 5.2^{\sqrt{x+3}+1} + 4.2^{x+2} = 0$

Đặt $\begin{cases} u = 2^{2\sqrt{x+3} - x} \\ v = 2^{x+2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sqrt{uv} = 2^{\sqrt{x+3}+1} \\ \sqrt{\dfrac{u}{v}} = 2^{\sqrt{x+3} + x - 1} \end{cases}, \ (u > 0, v > 0)$

Khi đó ta có phương trình: $u-5\sqrt{uv}+4v=0 \Leftrightarrow \frac{u}{v}-5\sqrt{\frac{u}{v}}+4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{u}{v}}=1\\ \sqrt{\frac{u}{v}}=4\end{array}\right.$.

Với $\sqrt{\frac{u}{v}}=1$ thì $2^{\sqrt{x+3}-x-1}=1 \Leftrightarrow x=1$

Với $\sqrt{\frac{u}{v}}=4$ thì $2^{\sqrt{x+3}-x-1}=4 \Leftrightarrow x=-2$

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: x = 1 và x = -2. ⇒ **Chọn (A).**

Lưu ý: Sau khi đặt 2 ẩn phụ thì phương trình ban đầu trở thành 1 phương trình đồng bậc: $af^2(x)+bf(x)g(x)+cg^2(x)=0$. Muốn giải phương trình này ta sẽ làm như sau:

- Xét xem g(x) = 0 có thỏa mãn phương trình hay không.

- Nếu g(x) = 0 không thỏa mãn phương trình thì chia cả 2 vế của phương trình cho g(x) để được phương trình bậc hai 1 ẩn:

$at^2+bt+c=0$, trong đó $t=\frac{f(x)}{g(x)}$.

Bài 11 Số nghiệm của phương trình $2^{2x^2+1}-9.2^{x^2+x}+2^{2x+2}=0$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 3; **(D)** 2.

Giải:

Đặt $\begin{cases}u=2^{2x^2+1}>0\\ v=2^{2x+2}>0\end{cases} \Rightarrow 2^{x^2+x}=\frac{\sqrt{uv}}{2\sqrt{2}}$.

Ta có phương trình:

$$u-9.\frac{\sqrt{uv}}{2\sqrt{2}}+v=0 \Leftrightarrow 2\sqrt{2}\frac{u}{v}-9\sqrt{\frac{u}{v}}+2\sqrt{2}=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\sqrt{\frac{u}{v}}=2\sqrt{2}\\ \sqrt{\frac{u}{v}}=\frac{\sqrt{2}}{4}\end{array}\right..$$

+ Với $\sqrt{\frac{u}{v}}=2\sqrt{2}$ thì $\frac{u}{v}=8 \Rightarrow 2^{2x^2-2x-1}=2^3 \Rightarrow 2x^2-2x-4=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=-1\\ x=2\end{array}\right.$.

+ Với $\sqrt{\frac{u}{v}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$ thì $\frac{u}{v}=\frac{1}{8} \Rightarrow 2^{2x^2-2x-1}=2^{-3} \Leftrightarrow 2x^2-2x+2=0$ (vô nghiệm)

Vậy phương trình đã cho có 2 nghiệm là: x = -1 và x = 2. **Chọn (D).**

4. Phương pháp sử dụng tính đơn điệu của hàm số

4.1) Phương pháp

Đối với phương pháp này ta có 3 hướng áp dụng:

▪ **Hướng 1:** Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: f(x) = k.

Bước 2: Xét hàm số y = f(x) và chứng minh cho hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên miền xác định.

Bước 3: Lập luận: Hàm số y = f(x) là đơn điệu mà y = k là hàm hằng nên phương trình f(x) = k có nghiệm $x = x_0$ thì nghiệm đó là duy nhất.

Bước 4: Kết luận: Vậy $x = x_0$ là nghiệm của phương trình.

Xét phương trình: $e^{2x} + x = 1$. Ta có: Hàm số $y = e^{2x} + x$ là hàm số đồng biến, vì $y' = 2e^{2x} + 1 > 0\ \forall x$. Mà y = 1 là hàm hằng nên phương trình $e^{2x} + x = 1$ nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất. Trong trường hợp này nghiệm duy nhất là x = 0.

▪ **Hướng 2:** Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển phương trình về dạng: f(x) = g(x).

Bước 2: Xét các hàm số y = f(x) và y = g(x). Chứng minh cho hàm số y = f(x) là đồng biến (nghịch biến), còn hàm số y = g(x) là nghịch biến (đồng biến) hoặc là hàm hằng. Xác định x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.

Bước 3: Kết luận: Phương trình có nghiệm duy nhất $x = x_0$.

Xét phương trình: $e^x = -x^3 + 1$. Ta có: Hàm số $y = f(x) = e^x$ là đồng biến, vì $f'(x) = e^x > 0\ \forall x$, hàm số $y = g(x) = -x^3 + 1$ là hàm số nghịch biến, vì $g'(x) = -3x^2 \le 0\ \forall x$. Mà f(0) = g(0) nên x = 0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

▪ **Hướng 3:** Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đưa phương trình về dạng: f(u) = f(v).

Bước 2: Xét hàm số y = f(x). Chứng minh cho hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến).

Bước 3: Khi đó, $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v$.

Bước 4: Giải tìm x và kết luận nghiệm.

Xét phương trình: $\log_3(3^x - 1) - \log_3 2x = 1 + 2x - 3^x$

$\Leftrightarrow \log_3(3^x - 1) + (3^x - 1) = \log_3 2x + 2x$.

Xét hàm đặc trưng: $f(t) = \log_3 t + t,\ t > 0$. Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0\ \forall t > 0$ nên hàm số y = f(t) đồng biến $\Rightarrow f(3^x - 1) = f(2x) \Leftrightarrow 3^x - 1 = 2x$. Từ đây sử dụng tiếp phương pháp đồ thị để giải phương trình và kết luận phương trình có nghiệm duy nhất x = 1.

4.2) Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Số nghiệm của phương trình $5^x = 3^x + 4^x$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: $5^x = 3^x + 4^x \Leftrightarrow \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x = 1.$

Ta thấy x = 2 là 1 nghiệm của phương trình.

Mặt khác:

+ $f(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x + \left(\frac{4}{5}\right)^x$ có đạo hàm $f'(x) = \left(\frac{3}{5}\right)^x \ln\frac{3}{5} + \left(\frac{4}{5}\right)^x \ln\frac{4}{5} < 0 \forall x \Rightarrow$ f(x) là hàm số nghịch biến.

+ g(x) = 1 là hàm hằng.

Do đó, đồ thị của hai hàm số f(x) và g(x) cắt nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ x = 2.

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình. ⇒ **Chọn (B).**

Bài tập 2 Số nghiệm của phương trình $2^x = 1 + 3^{\frac{x}{2}}$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 1.

Giải:

Ta có: $2^x = 1 + 3^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow 4^{\frac{x}{2}} = 1 + 3^{\frac{x}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}} = 1.$

Ta thấy x = 2 là 1 nghiệm của phương trình.

Mặt khác:

+ $f(x) = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}} + \left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$ có đạo hàm $f'(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^x \ln\frac{3}{4} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^x \ln\frac{1}{4} < 0 \forall x \Rightarrow$ f(x) là hàm số nghịch biến.

+ g(x) = 1 là hàm hằng.

Do đó, đồ thị của hai hàm số f(x) và g(x) cắt nhau tại một điểm duy nhất có hoành độ x = 2.

Vậy x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình. ⇒ **Chọn (D).**

Lưu ý: Bài trên ta đã sử dụng đơn vị kiến thức sau: Nếu f(x) là hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên miền xác định và g(x) là hàm hằng thì phương trình f(x) = g(x) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Số nghiệm của phương trình $\log_5(5^x - 4) = 1 - x$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $5^x - 4 > 0(*)$

Ta có:

+ $f(x) = \log_5(5^x - 4)$ có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{5^x}{(5^x - 4)\ln 5} > 0 \forall x$ thỏa mãn (*) $\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên tập xác định.

+ g(x) = 1 – x có đạo hàm g'(x) = -1 < 0 $\forall x$ thỏa mãn (*) $\Rightarrow$ g(x) nghịch biến trên tập xác định.

Mà f(1) = g(1) nên phương trình có nghiệm duy nhất x = 1. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Số nghiệm của phương trình $\log_2(2x - 1) = -x + 1$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $2x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > \dfrac{1}{2}(**)$

Ta có:

+ $f(x) = \log_2(2x - 1)$ có đạo hàm $f'(x) = \dfrac{2}{(3x - 1)\ln 2} > 0 \forall x$ thỏa mãn (**) $\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên tập xác định.

+ g(x) = -x + 1 có đạo hàm g'(x) = -1 < 0 $\forall x$ thỏa mãn $(**) \Rightarrow$ g(x) nghịch biến trên tập xác định.

Mà f(1) = g(1) nên x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Ở bài trên ta đã sử dụng đơn vị kiến thức sau: Nếu f(x) là hàm số đồng biến (nghịch biến) và g(x) là hàm số nghịch biến (đồng biến) trên miền xác định thì phương trình f(x) = g(x) nếu có nghiệm thì nghiệm đó là duy nhất.

Số nghiệm của phương trình $3^{x-1} - 3^{x^2-x} = (x-1)^2$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

$3^{x-1} - 3^{x^2-x} = (x-1)^2 \Leftrightarrow 3^{x-1} - 3^{x^2-x} = (x^2 - x) - (x - 1)$

$\Leftrightarrow 3^{x-1} + x - 1 = 3^{x^2-x} + x^2 - x \quad (1)$

Đặt $\begin{cases} u = x - 1 \\ v = x^2 - x \end{cases}$. Ta có (1) trở thành: $3^u + u = 3^v + v$.

Xét hàm số: $f(t) = 3^t + t$. Ta có: $f'(t) = 2^t \ln 2 + 1 > 0\ \ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f(t) đồng biến với mọi $t \in \mathbb{R}$.

Do đó $f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow x - 1 = x^2 - x \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Vậy nghiệm của phương trình là x = 1. ⇒ **Chọn (B).**

Lưu ý: Ở câu này ta đã sử dụng đơn vị kiến thức sau: Nếu f(u) = f(v) và f(x) là hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến) trên miền xác định thì u = v.

Số nghiệm của phương trình $\log_2(x^2 - 4) + x = \log_2[8(x+2)]$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x^2 - 4 > 0 \\ x + 2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 2.$

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2(x^2 - 4) - \log_2(x+2) = 3 - x$

$\Leftrightarrow \log_2 \dfrac{x^2 - 4}{x + 2} = 3 - x \Leftrightarrow \log_2(x - 2) = 3 - x$

Ta thấy:

+ Hàm số $y = \log_2(x - 2)$ là hàm số đồng biến.

+ Hàm số y = 3 – x là hàm số nghịch biến.

Mà x = 3 là một nghiệm nên x = 3 là nghiệm duy nhất.

Vậy phương trình có nghiệm là: x = 3. ⇒ **Chọn (B).**

Số nghiệm của phương trình $\left(\sqrt{7 + 4\sqrt{3}}\right)^x + \left(\sqrt{7 - 4\sqrt{3}}\right)^x = \sqrt{14^x}$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \left(\sqrt{\dfrac{7 + 4\sqrt{3}}{14}}\right)^x + \left(\sqrt{\dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{14}}\right)^x = 1.$

Ta có:

+ $f(x) = \left(\sqrt{\dfrac{7 + 4\sqrt{3}}{14}}\right)^x + \left(\sqrt{\dfrac{7 - 4\sqrt{3}}{14}}\right)^x$ là hàm số nghịch biến.

+ g(x) = 1 là hàm hằng.

Mà f(2) = g(2) nên x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình. ⇒ **Chọn (C).**

Số nghiệm của phương trình $3^x - \left(\dfrac{1}{3}\right)^x + 5^x - \left(\dfrac{1}{4}\right)^x - \left(\dfrac{5}{12}\right)^x = -3x + 10$ là:

(A) 3; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 1.

Giải:

Xét $f(x)=3^x-\left(\frac{1}{3}\right)^x+5^x-\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{5}{12}\right)^x$.

$f'(x)=3^x\ln 3-\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}+5^x\ln 5-\left(\frac{1}{4}\right)^x-\left(\frac{5}{12}\right)^x\ln\frac{5}{12}$

$=3^x\ln 3+\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln 3+5^x\ln 5+\left(\frac{1}{4}\right)^x\ln 4+\left(\frac{5}{12}\right)^x\ln\frac{12}{5}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

$\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà g(x) = -3x + 10 nghịch biến trên $\mathbb{R}$ và f(1) = g(1) = 7 nên phương trình có nghiệm duy nhất x = 1. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tập nghiệm của phương trình $\log_2^2 x+(x-1)\log_2 x=6-2x$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $\{2\}$; **(C)** $\left\{\frac{1}{4};1\right\}$; **(D)** $\left\{\frac{1}{4};2\right\}$.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Đặt $t=\log_2 x$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$t^2+(x-1)t+2x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=-2\\t=3-x\end{array}\right.$.

+ Với t = -2 thì $\log_2 x=-2\Leftrightarrow x=\frac{1}{4}$.

+ Với t = 3 – x thì $\log_2 x=3-x$ (1)

Ta có:

+ $f(x)=\log_2 x$ là hàm số đồng biến.

+ g(x) = 3 – x là hàm số nghịch biến.

Mà f(2) = g(2) nên x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình (1).

Vậy tập nghiệm của phương trình đã cho là: $\left\{\frac{1}{4};2\right\}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Số nghiệm của phương trình $x^2+3^{\log_2 x}=x^{\log_2 5}$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Đặt $t=\log_2 x\Rightarrow x=2^t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành:

$\left(2^t\right)^2+3^t=\left(2^t\right)^{\log_2 5}\Leftrightarrow 2^{2t}+3^t=\left(2^{\log_2 5}\right)^t$

$\Leftrightarrow 4^t+3^t=5^t\Leftrightarrow\left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t=1$ (2)

Ta thấy:

+ $f(t)=\left(\frac{4}{5}\right)^t+\left(\frac{3}{5}\right)^t$ là hàm số nghịch biến.

+ g(t) = 1 là hàm hằng.

Mà f(2) = g(2) nên t = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình (2).

Với t = 2 thì $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 2^2 = 4$.

Vậy x = 4 là nghiệm của phương trình đã cho. ⇒ **Chọn (A).**

C. Tăng tốc

Bài tập 11. Nghiệm của phương trình $2\log_6\left(\sqrt[4]{x}+\sqrt[8]{x}\right)=\log_4\sqrt{x}$ là:

(A) $x=2$; **(B)** $x=16$; **(C)** $x=256$; **(D)** $x=32$.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Đặt $t=\log_4\sqrt{x}$. Khi đó: $\sqrt{x}=4^t, \sqrt[4]{x}=4^{\frac{t}{2}}, \sqrt[4]{x}=4^{\frac{t}{4}}$.

Phương trình $\Leftrightarrow 2.\log_6\left(4^{\frac{t}{2}}+4^{\frac{t}{4}}\right)=t \Leftrightarrow \log_6\left(4^{\frac{t}{2}}+4^{\frac{t}{4}}\right)=\frac{t}{2}$

$\Leftrightarrow 4^{\frac{t}{2}}+4^{\frac{t}{4}}=6^{\frac{t}{2}} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{2}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}}=1.$

Ta thấy:

+ $f(t)=\left(\frac{2}{3}\right)^{\frac{t}{2}}+\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{t}{2}}$ là hàm số nghịch biến.

+ g(t) = 1 là hàm hằng.

Mà f(2) = g(2) nên t = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Với t = 2 thì $\log_4\sqrt{x}=2 \Leftrightarrow \sqrt{x}=2^4=16 \Leftrightarrow x=256$ (thỏa mãn điều kiện).

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là x = 256. ⇒ **Chọn (C).**

Bài tập 12. Số nghiệm của phương trình $\log_3\left(\frac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}\right)=x^2+3x+2$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: $\frac{x^2+x+3}{2x^2+4x+5}>0\ \forall x\in\mathbb{R}$

Phương trình $\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+x+3\right)-\log_3\left(2x^2+4x+5\right)=x^2+x+3$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+x+3\right)-\log_3\left(2x^2+4x+5\right)=\left(2x^2+4x+5\right)-\left(x^2+x+3\right)$

$\Leftrightarrow \log_3\left(x^2+x+3\right)+\left(x^2+x+3\right)=\log_3\left(2x^2+4x+5\right)+\left(2x^2+4x+5\right)$

Đặt $\begin{cases} u = x^2 + x + 3 = \left(x + \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{11}{4} \geq \dfrac{11}{4} \\ v = 2x^2 + 4x + 5 = 2(x+1)^2 + 3 \geq 3 \end{cases}$

Khi đó ta được: $\log_3 u + u = \log_3 v + v$

Xét hàm số $f(t) = \log_3 t + t \ (t > 2) \Rightarrow f'(t) = \dfrac{1}{t\ln 3} + 1 > 0 \ \forall t > 2$

$\Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$

Do đó:

$f(u) = f(v) \Leftrightarrow u = v \Leftrightarrow 2x^2 + 4x + 5 = x^2 = x + 3 \Leftrightarrow x^2 + 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1 \\ x = -2 \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình là x = -1 và x = -2. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: $\log_a \dfrac{u}{v} = \log_a u - \log_a v$ khi $\begin{cases} u > 0 \\ v > 0 \end{cases}$.

Đối với bài trên, vì $\begin{cases} x^2 + x + 3 > 0 \\ 2x^2 + 4x + 5 > 0 \end{cases} \forall x$ nên:

$\log_3 \dfrac{x^2 + x + 3}{2x^2 + 4x + 5} = \log_3(x^2 + x + 3) - \log_3(2x^2 + 4x + 5)$.

Bài toán [illegible] Số nghiệm nguyên dương của phương trình:

$x.2^{1-x} + 2.\log_2(1+x) = x.\log_2(1+x) + \log_2(x+1)^2$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Phương trình $\Leftrightarrow x.2^{1-x} + 2\log_2(1+x) - x.\log_2(1+x) - 2\log_2(1+x) = 0$

$\Leftrightarrow x.\left(2^{1-x} - \log_2(1+x)\right) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ 2^{1-x} - \log_2(1+x) = 0 \ (1) \end{array}\right.$

Xét hàm số $f(x) = 2^{1-x} - \log_2(x+1)$ với x > -1.

$f'(x) = -2^{1-x}\ln 2 - \dfrac{1}{(x+1)\ln 2} < 0 \ \forall x > -1$

$\Rightarrow$ f(x) là hàm số nghịch biến trên $(-1;+\infty)$

Mà f(1) = 0 nên (1) có nghiệm duy nhất x = 1.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: x = 0 và x = 1.

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm nguyên dương x = 1. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Số nghiệm của phương trình $2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}$ là:

(A) 1; (B) 0; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Điều kiện: $x\neq 0$.

Ta có: $\frac{1-2x}{x^2}-\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{x^2-2x}{x^2}=1-\frac{2}{x}=2\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{x}\right)$.

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}-2^{\frac{1-2x}{x^2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{1-2x}{x^2}-\frac{1-x^2}{x^2}\right)$

$\Leftrightarrow 2^{\frac{1-x^2}{x^2}}+\frac{1}{2}.\frac{1-x^2}{x^2}=2^{\frac{1-2x}{x^2}}+\frac{1}{2}.\frac{1-2x}{x^2}$.

Mặt khác $f(t)=2^t+\frac{t}{2}$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$ và:

$f\left(\frac{1-x^2}{x^2}\right)=f\left(\frac{1-2x}{x^2}\right)\Rightarrow\frac{1-x^2}{x^2}=\frac{1-2x}{x^2}\Leftrightarrow x=2$.

Vậy $x=2$ là nghiệm duy nhất của phương trình. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Số nghiệm nguyên âm của phương trình

$\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)+|x|=\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\sqrt{2x^2+1}$ là:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Vì $\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right).\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)=2x^2$ nên :

$\log_2\left(2x^2\right)=\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}+1\right)+\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)$

Do đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2\left(2x^2\right)+|x|=2\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\sqrt{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow \log_2 2+\log_2 x^2+|x|=2\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\sqrt{2x^2+1}$

$\Leftrightarrow 2\log_2|x|+|x|=2\log_2\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)+\sqrt{2x^2+1}-1 \quad (1)$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=2\log_2 t+t,\ t>0$

Ta có: $f'(t)=\frac{2}{t\ln 2}+1>0\ \forall t>0\Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow f(|x|)=f\left(\sqrt{2x^2+1}-1\right)\Leftrightarrow |x|=\sqrt{2x^2+1}-1$

$\Leftrightarrow |x|+1=\sqrt{2x^2+1}\Leftrightarrow (|x|+1)^2=2x^2+1$

$\Leftrightarrow x^2+2|x|+1=2x^2+1\Leftrightarrow x^2-2|x|=0\Leftrightarrow |x|(|x|-2)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}|x|=0\\|x|=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=\pm 2\end{array}\right.$.

Vậy phương trình có nghiệm nguyên âm duy nhất là x = -2. ⇒ **Chọn (B).**

Lưu ý: Công thức: $\log_a bc = \log_a b + \log_a c$, trong đó $\begin{cases} 0 < a \neq 1 \\ b, c > 0 \end{cases}$.

Số nghiệm của phương trình $3^x + 2^x = 3x + 2$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 1.

Giải:

Ta có: $3^x + 2^x = 3x + 2 \Leftrightarrow 3^x + 2^x - 3x - 2 = 0 \ (1)$

Ta thấy: x = 0 và x = 1 là 2 nghiệm của (1).

Xét hàm số: $f(x) = 3^x + 2^x - 3x - 2$.

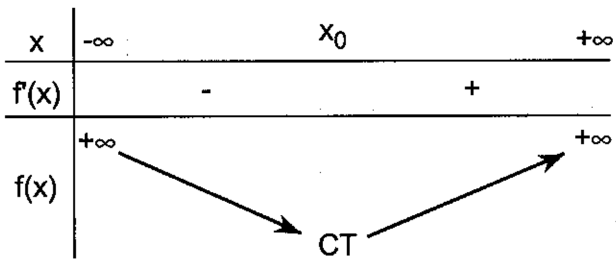
$f'(x) = 3^x \ln 3 + 2^x \ln 2 - 3$

$f''(x) = 3^x \ln^2 3 + 2^x \ln^2 2 > 0 \ \forall x \Rightarrow f'(x)$ là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mặt khác: $\begin{cases} f'(0) = \ln 6 - 3 < 0 \\ f'(1) = \ln 108 - 3 > 0 \end{cases} \Rightarrow f'(0).f'(1) < 0$

$\Rightarrow f'(x) = 0$ có 1 nghiệm duy nhất $x_0 \in (0;1)$

Bảng biến thiên:



Suy ra phương trình f(x) = 0 có 2 nghiệm x = 0 và x = 1. ⇒ **Chọn (B).**

Số nghiệm của phương trình $\sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{2}} - e^x + \dfrac{1}{2}x = 0$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Xét hàm số $f(x) = \sqrt{\dfrac{e^{2x}+1}{2}} - e^x + \dfrac{1}{2}x$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{e^{2x}}{\sqrt{2(e^{2x}+1)}} - e^x + \dfrac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \sqrt{2}e^{2x} = (2e^x - 1)\sqrt{e^{2x}+1}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x > 1 \\ 2e^{4x} = (2e^x - 1)^2 (e^{2x}+1) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x > 1 \\ 2e^{4x} - 4e^{3x} + 5e^{2x} - 4e^x + 1 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2e^x > 1 \\ (e^x - 1)(2e^{3x} - 2e^{2x} + 3e^x - 1) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow e^x = 1 \Leftrightarrow x = 0$$

Ta thấy $f'(x) < 0\ \forall x < 0$ và $f'(x) > 0\ \forall x > 0 \Rightarrow f(x) \le f(0) = 0\ \forall x \in \mathbb{R}$ và $g(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất x = 0. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 18 Số nghiệm của phương trình $\log_2 \dfrac{2^x - 1}{|x|} = 1 + x - 2^x$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: x > 0.

Phương trình $\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) - \log_2 x = 1 + x - 2^x$

$\Leftrightarrow \log_2(2^x - 1) + (2^x - 1) = \log_2 x + x$

Đặt $u = 2^x - 1 > 0$

Ta có: $\log_2 u + u = \log_2 x + x \Leftrightarrow f(u) = f(x)$

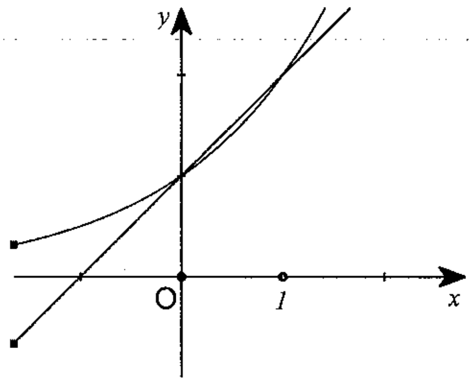
Xét hàm đặc trưng: $f(t) = \log_2 t + t,\ t > 0$

$f'(t) = \dfrac{1}{t \ln t} + 1 > 0\ \forall t > 0 \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến $\forall t > 0$

Do đó $f(u) = f(x) \Leftrightarrow u = x \Leftrightarrow 2^x - 1 = x \Leftrightarrow 2^x = x + 1$

Ta có: x = 0 và x = 1 là 2 nghiệm của phương trình

Mặt khác đường thẳng (d): y = x + 1 chỉ cắt đồ thị (C) của hàm số $y = 2^x$ tại tối đa 2 điểm (minh họa bằng hình vẽ dưới đây). Mà x > 0 nên phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x = 1$.



$\Rightarrow$ Chọn (A).

Lưu ý: Phương pháp vẽ đồ thị hàm số cho ta đoán nhận số nghiệm của 1 phương trình chính bằng số giao điểm của hai đồ thị hàm số.

Bài tập 19: Số nghiệm không âm của phương trình $2017^x+\frac{1}{21^x}+\frac{1}{96^x}=2017^{x^2}+\frac{1}{21^{x^2}}+\frac{1}{96^{x^2}}$ là:

(A) 4; **(B)** 3; **(C)** 1; **(D)** 2.

Giải:

Xét hàm số $f(t)=2017^t+\frac{1}{21^t}+\frac{1}{96^t}, t\in[0;+\infty)$

Ta có: $f'(t)=2017^t\ln 2017+\frac{1}{21^t}\ln\frac{1}{21}+\frac{1}{96^t}\ln\frac{1}{96}, t\in[0;+\infty)$

$f''(t)=2017^t\ln(2017)^2+\frac{1}{21^t}\left(\ln\frac{1}{21}\right)^2+\frac{1}{96^t}\left(\ln\frac{1}{96}\right)^2>0\ \forall t\in(0;+\infty)$

$f''(t)$ liên tục trên $[0;+\infty)$ và nhận giá trị dương trên $(0;+\infty)$ nên $f'(t)$ đồng biến trên $[0;+\infty)$

$\Rightarrow f'(t)>f'(0)\ \forall t>0 \Rightarrow f'(t)>2017^0\ln 2017+\frac{1}{21^0}\ln\frac{1}{21}+\frac{1}{96^0}\ln\frac{1}{96}$

$=\ln\frac{2017}{21.96}=\ln\frac{2017}{2016}$

$\Rightarrow f'(t)>\ln\frac{2017}{2016}>0$

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên $[0;+\infty)$

Với x không âm mà

$2017^x+\frac{1}{21^x}+\frac{1}{96^x}=2017^{x^2}+\frac{1}{21^{x^2}}+\frac{1}{96^{x^2}}\Leftrightarrow f(x)=f(x^2)\Leftrightarrow x=x^2\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=0\\x=1\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm không âm của phương trình ban đầu là: x = 0 và x = 1. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 20: Nghiệm (x; y) của phương trình $4^x-2^{x+1}+2(2^x-1)\sin(2^x+y-1)+2=0$ là:

(A) $\left(-1;-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$; **(B)** $\left(1;-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$;

(C) $\left(-1;-1-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$; **(D)** $\left(1;-1-\frac{\pi}{2}+k2\pi\right)$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow(2^{2x}-2.2^x+1)+2(2^x-1)\sin(2^x+y-1)+1=0$

$\Leftrightarrow\left[(2^x-1)^2+2(2^x-1).\sin(2^x+y-1)+\sin^2(2^x+y-1)\right]+1-\sin^2(2^x+y-1)=0$

$\Leftrightarrow\left[2^x-1+\sin(2^x+y-1)\right]^2+\cos^2(2^x+y-1)=0$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2^x-1+\sin(2^x+y-1)=0 & (1)\\ \cos(2^x+y-1)=0 & (2)\end{cases}$$

$(2) \Leftrightarrow \sin\left(2^x + y - 1\right) = \pm 1$

+ Với $\sin\left(2^x + y - 1\right) = 1$ thì $(1) \Leftrightarrow 2^x = 0$ vô nghiệm

+ Với $\sin\left(2^x + y - 1\right) = -1$ thì $2^x = 2 \Leftrightarrow x = 1$

Thế x = 1 vào (1) ta có:

$$\sin(y+1) = -1 \Leftrightarrow y + 1 = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \Leftrightarrow y = -1 - \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$$

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 1, $y = -1 - \frac{\pi}{2} + k2\pi \ (k \in \mathbb{Z})$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: $A^2 + B^2 = 0 \Leftrightarrow A = B = 0.$

Bài tập 21 Tìm số nghiệm của phương trình $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1$ với tham số $a \in (0;1)$.

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 1.

Giải:

Ta có: $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x - \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x = 1 \Leftrightarrow \left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x = \left(\frac{1-a^2}{2a}\right)^x + 1$

Chia cả 2 vế của phương trình cho $\left(\frac{1+a^2}{2a}\right)^x$ ta được: $1 = \left(\frac{2a}{1+a^2}\right)^x + \left(\frac{1-a^2}{1+a^2}\right)^x$.

Vì $a \in (0;1)$ nên tồn tại góc $\varphi \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right)$ sao cho $\tan\frac{\varphi}{2} = a$.

Khi đó ta có:

$$1 = \left(\frac{2\tan\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\varphi}\right) + \left(\frac{1-\tan^2\frac{\varphi}{2}}{1+\tan^2\varphi}\right) \Leftrightarrow 1 = (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x$$

Hàm số $y = (\sin\varphi)^x + (\cos\varphi)^x$ là hàm số nghịch biến. Mà ta có: $f(2) = (\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi)^2 = 1$ nên x = 2 là nghiệm duy nhất của phương trình. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Bài trên ta đã sử dụng kết hợp phương pháp lượng giác hóa và xét tính đơn điệu của hàm số để giải bài toán một cách "đẹp mắt".

Số nghiệm của phương trình $2^x + 2^{\sqrt{2-x^2}} = 4$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 0; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $2 - x^2 \geq 0 \Leftrightarrow -\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}.$

Đặt $f(x) = 2^x + 2^{\sqrt{2-x^2}}$, $x \in \left[-\sqrt{2}; \sqrt{2}\right]$

Ta có: $f'(x) = 2^x \ln 2 - \frac{x}{\sqrt{2-x^2}}.2^{\sqrt{2-x^2}} \ln 2 = \left(2^x\sqrt{2-x^2} - x.2^{\sqrt{2-x^2}}\right)\frac{\ln 2}{\sqrt{2-x^2}}.$

$f'(x)=0 \Leftrightarrow 2^x\sqrt{2-x^2}-x.2^{\sqrt{2-x^2}}=0 \Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{2-x^2}}{2^{\sqrt{2-x^2}}}=\dfrac{x}{2^x}$.

Xét hàm số $g(t)=\dfrac{t}{2^t}$, $t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$, $g'(t)=\dfrac{1-t\ln 2}{2^t}$.

Vì $t\in\left[-\sqrt{2},\sqrt{2}\right] \Rightarrow t\ln 2 \le \sqrt{2}\ln 2<1 \Rightarrow g'(t)>0\ \forall t\in\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$ nên hàm số g(t) đồng biến trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$.

Ta có: $\dfrac{\sqrt{2-x^2}}{2^{\sqrt{2-x^2}}}=\dfrac{x}{2^x} \Leftrightarrow g\left(\sqrt{2-x^2}\right)=g(x) \Leftrightarrow \sqrt{2-x^2}=x$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ 2-x^2=x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 0 \\ x=\pm 1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1$

$\Rightarrow f'(x)=0 \Leftrightarrow x=1$

Lập bảng biến thiên của f(x) trên $\left[-\sqrt{2};\sqrt{2}\right]$

x	$-\sqrt{2}$		1		$\sqrt{2}$
f'(x)		+	0	-	
f(x)		↗	4	↘	

$\Rightarrow$ f(x) = 4 có nghiệm duy nhất x = 1. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

[illegible] Số nghiệm âm của phương trình $\ln\dfrac{x^4+x^3+x^2}{x^4+x^2+1}+\dfrac{x-1}{\left(x^2-x+3\right)\left(x^2+2\right)}=0$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $x\ne 0$.

Ta có: $x^4+x^2+1=x^4+2x^2+1-x^2=\left(x^2+1\right)^2-x^2=\left(x^2-x+1\right)\left(x^2+x+1\right)$

Khi đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \ln\dfrac{x^2}{x^2-x+1}+\dfrac{x-1}{\left(x^2-x+3\right)\left(x^2+2\right)}=0$ (1)

Đặt $\begin{cases} u=x^2+2>2 \\ v=x^2-x+3>2 \end{cases}$. Khi đó phương trình (1) trở thành:

$\ln\dfrac{u-2}{v-2}+\dfrac{u-v}{uv}=0 \Leftrightarrow \ln(u-2)-\dfrac{1}{u}=\ln(v-2)-\dfrac{1}{v}$ (2)

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=\ln(t-2)-\dfrac{1}{t}$ $(t>2)$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t-2}+\dfrac{1}{t^2}>0\ \forall t>2 \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $(2;+\infty)$

Khi đó, $(2) \Leftrightarrow f(u)=f(v) \Leftrightarrow u=v \Leftrightarrow x^2+2=x^2-x+3 \Leftrightarrow x=1$ (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: x = 1.

$\Rightarrow$ Phương trình không có nghiệm âm. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

5. Phương pháp sử dụng đánh giá

1) Phương pháp

◆ **Dạng 1:** Đánh giá dựa trên tính chất hàm số mũ hay hàm số logarit

a) Phương pháp chung: Giải phương trình f(x) = g(x).

Xét trên miền xác định D ta có: $\begin{cases} f(x) \geq m \\ g(x) \leq m \end{cases} \forall x \in D$. Khi đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=m \\ g(x)=m \end{cases}$.

b) Ví dụ: Giải phương trình: $2^{x^2}=\cos 2x$.

Ta có: $x^2 \geq 0\ \forall x \Rightarrow 2^{x^2} \geq 2^0 = 1$.

Mà $\sin 2x \leq 1\ \forall x \Rightarrow$ Phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ \cos 2x=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$.

Vậy x = 0 là nghiệm của phương trình.

◆ **Dạng 2:** Đánh giá phương trình mũ, logarit bằng các bất đẳng thức cơ bản

a) *Bất đẳng thức Côsi*

Với mọi số thực không âm $a_1, a_2, ..., a_n$ ta có bất đẳng thức: $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$.

Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$.

b) *Bất đẳng thức Bernoulli*

$(1+x)^r \geq 1+rx$ với mọi số nguyên $r \geq 0$ và với mọi số thực x > -1. Nếu số mũ r là chẵn, thì bất đẳng thức này đúng với mọi số thực x. Bất đẳng thức này trở thành bất đẳng thức nghiêm ngặt như sau:

$(1+x)^r > 1+rx$ với mọi số nguyên $r \geq 2$ và với mọi số thực $x \geq 1$ với $x \neq 0$.

c) *Bất đẳng thức Bunhiacopxki*

Với 2 dãy số thực tùy ý $a_1, a_2, ..., a_n$ và $b_1, b_2, ..., b_n$ ta có bất đẳng thức:

$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2) \geq (a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{R}: a_i = kb_i, \forall i=\overline{1,n}$.

2) Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1. Số nghiệm của phương trình $\log_2\left(x^2+2\right)=1-4x^2$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Ta có: $x^2+2\geq 2$ nên $\log_2\left(x^2+2\right)\geq \log_2 2=1$. Mà $1-4x^2\leq 1$, suy ra phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+2=1 \\ 1-4x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0.$

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 0. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 2. Tập nghiệm của phương trình $\left|\ln(2x-3)+\ln\left(4-x^2\right)\right|=\left|\ln(2x-3)\right|+\left|\ln\left(4-x^2\right)\right|$ là:

(A) $\{1\}$; **(B)** $\left\{1;\frac{3}{2}\right\}$; **(C)** $\left(\sqrt{3};2\right)$; **(D)** $\left[\sqrt{3};2\right)$.

Giải:

Sử dụng bất đẳng thức: $|a+b|\leq|a|+|b|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab\geq 0$.

Do đó phương trình đã cho:

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \ln(2x-3)\geq 0 \\ \ln\left(4-x^2\right)\geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \ln(2x-3)\leq 0 \\ \ln\left(4-x^2\right)\leq 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-3\geq 1 \\ 4-x^2\geq 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<2x-3\leq 1 \\ 0<4-x^2\leq 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x\geq 2 \\ -\sqrt{3}\leq x\leq \sqrt{3} \end{cases} \text{(VN)} \\ \begin{cases} \frac{3}{2}<x\leq 2 \\ 3\leq x^2<4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \sqrt{3}\leq x<2.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\sqrt{3}\leq x<2$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 3. Số nghiệm của phương trình $3^{x^2+1}+5^{x^4+x^2+2}=28$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: $\begin{cases} 3^{x^2+1}\geq 3^{0+1}=3 \\ 5^{x^4+x^2+2}\geq 5^{0+0+2}=25 \end{cases} \Rightarrow VT=3^{x^2+1}+5^{x^4+x^2+2}=28=VP$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x=0$.

Vậy nghiệm của phương trình là: x = 0. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nghiệm của phương trình $3^{x+1}+3^{1-2x}=\frac{9}{4}\sqrt[3]{2}$ là:

(A) $x=2$; **(B)** $x=\log_3 2$; **(C)** $x=\frac{1}{3}\log_2 3$; **(D)** $x=\frac{1}{3}\log_3 2$.

Giải:

Ta có: $3^{x+1}+3^{1-2x}=\frac{3^{x+1}}{2}+\frac{3^{x+1}}{2}+3^{1-2x}\geq 3\sqrt[3]{\frac{3^{x+1}}{2}.\frac{3^{x+1}}{2}.3^{1-2x}}=\frac{9}{4}\sqrt[3]{2}.$

Dấu "=" xảy ra:

$\Leftrightarrow \frac{3^{x+1}}{2}=\frac{3^{x+1}}{2}=3^{1-2x}\Leftrightarrow \frac{3^{x+1}}{2}=3^{1-2x}\Leftrightarrow 3^{3x}=2\Leftrightarrow 27^x=2\Leftrightarrow x=\log_{27}2=\frac{1}{3}\log_3 2.$

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=\frac{1}{3}\log_3 2$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Số nghiệm của phương trình $4^{x^2+2x+3}+5^{x^2+2x+2}+6^{x^2+2x+1}=22$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 0; **(D)** 3.

Giải:

Ta có:

$$\begin{cases}4^{x^2+2x+3}=4^{(x+1)^2+2}\geq 4^{0+2}=16\\ 5^{x^2+2x+2}=5^{(x+1)^2+1}\geq 5^{0+1}=5\\ 6^{x^2+2x+1}=6^{(x+1)^2}\geq 6^0=1\end{cases}\Rightarrow VT=4^{x^2+2x+3}+5^{x^2+2x+2}+6^{x^2+2x+1}\geq 16+5+1=22=VP$$

$\Rightarrow$ Phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x=-1$

Vậy nghiệm của phương trình là: x = -1. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nghiệm của phương trình $2^{4x+2}+2^{6-4x}=\frac{32}{\log_3\left(4x^2-4x+4\right)}$ là:

(A) $x=0$; **(B)** $x=-\frac{1}{2}$; **(C)** $x=\frac{1}{2}$; **(D)** $x=\frac{3}{2}$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho 2 số dương 2^{4x+2} và 2^{6-4x} ta có:

$2^{4x+2}+2^{6-4x}\geq 2\sqrt{2^{4x+2}.2^{6-4x}}=32$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow 2^{4x+2}=2^{6-4x}\Leftrightarrow 4x+2=6-4x\Leftrightarrow 8x=4\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Ta có: $4x^2-4x+4=(2x-1)^2+3\geq 3\Rightarrow \frac{32}{\log_3\left(4x^2-4x+4\right)}\leq\frac{32}{\log_3 3}=32.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow (2x-1)^2=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Do đó phương trình có nghiệm $\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

Vậy nghiệm của phương trình là $x=\dfrac{1}{2}$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Tập nghiệm của phương trình $\left|3^x-1\right|+\left|3^x-3\right|=2$ là:

(A) $\{0;1\}$; **(B)** $\{0;1;2\}$; **(C)** $[0;1]$; **(D)** $\left\{0;1;\dfrac{1}{2}\right\}$.

Giải:

Ta có: $VT=\left|3^x-1\right|+\left|3^x-3\right|=\left|3^x-1\right|+\left|3-3^x\right|\ge\left|3^x-1+3-3^x\right|=2=VP$.

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\left(3^x-1\right)\left(3-3^x\right)\ge0\Leftrightarrow1\le3^x\le3\Leftrightarrow0\le x\le1$.

Vậy nghiệm của phương trình là: $0\le x\le1$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Bất đẳng thức giá trị tuyệt đối hay được sử dụng: $|a+b|\ge|a+b|$, dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow ab\ge0$.

Số nghiệm của phương trình $6^x-2^x=32$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow 32+2^x=6^x\Leftrightarrow 32\left(\dfrac{1}{6}\right)^x+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x=1$

Nhận thấy $x=2$ là nghiệm của phương trình.

+ Với $x>2$ ta có: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$ và $32\left(\dfrac{1}{6}\right)^x<32\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{8}{9}\Rightarrow32\left(\dfrac{1}{6}\right)^x+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x<1$

Vậy $x>2$ không là nghiệm của phương trình.

+ Với $x<2$ ta có: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$ và $32\left(\dfrac{1}{6}\right)^x>32\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{8}{9}\Rightarrow32\left(\dfrac{1}{6}\right)^x+\left(\dfrac{1}{3}\right)^x>1$

Vậy $x<2$ không phải là nghiệm của phương trình.

Vậy nghiệm của phương trình là: $x=2$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Số nghiệm của phương trình $\left(1+\sqrt{3}\right)^{\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}}=4+2\sqrt{3}$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 1.

Giải:

Điều kiện: $2\le x\le6$.

Theo bất đẳng thức Bunhiacopxki ta có: $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}\le\sqrt{\left(1^2+1^2\right)\left(x-3+5-x\right)}=2$

$\Rightarrow VT\le\left(1+\sqrt{3}\right)^2=4+2\sqrt{3}=VP$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x-3=5-x\Leftrightarrow x=4$.

Vậy x = 4 là nghiệm duy nhất của phương trình. ⇒ **Chọn (D).**

Nhận xét: Ở bài này ta có thể quy về giải phương trình vô tỉ $\sqrt{x-3}+\sqrt{5-x}=2$ bằng cách bình phương 2 vế.

C. Tăng tốc

Bài tập 10: Nghiệm (x; y) của phương trình $4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}+7=10+\cos 2y$ là:

(A) $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;k2\pi\right)$; **(B)** $\left(\frac{\pi}{2}+k2;k2\pi\right)$; **(C)** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};\frac{k\pi}{2}\right)$; **(D)** $\left(\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2};k\pi\right)$.

Giải:

Ta có: $VT=4^{\sin^2 x}+4^{\cos^2 x}+7\ge 2\sqrt{4^{\sin^2 x}.4^{\cos^2 x}}=2\sqrt{4^{\sin^2 x+\cos^2 x}}+7=2\sqrt{4}+7=11.$

$VP=10+\cos 2y\le 10+1=11$

Do đó để phương trình có nghiệm thì:

$$\begin{cases}4^{\sin^2 x}=4^{\cos^2 x}\\ \cos 2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin^2 x=\cos^2 x\\ \cos 2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\cos 2x=0\\ \cos 2y=1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x=\frac{\pi}{2}+k\pi\\ 2y=k2\pi\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ y=k\pi\end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình là: $\begin{cases}x=\frac{\pi}{4}+\frac{k\pi}{2}\\ y=k\pi\end{cases}.$

⇒ **Chọn (D).**

Lưu ý: Để ý từ $\sin^2 x+\cos^2 x=1$ ta sẽ sử dụng bất đẳng thức Cô-Si để giải quyết bài toán.

Bài tập 11: Nghiệm (x; y) của phương trình $4^{\sin x}-2^{1+\sin x}\cos xy+2^{|y|}=0$ là:

(A) $\left(\frac{k\pi}{2};0\right)$; **(B)** $\left(\frac{\pi}{2}+k2\pi;0\right)$; **(C)** $\left(\frac{\pi}{2}+k\pi;0\right)$; **(D)** $(k\pi;0)$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow\left[2^{\sin x}-\cos(xy)\right]^2+\left[2^{|y|}-\cos^2(xy)\right]=0$ (1)

Vì $\begin{cases}2^{|y|}\ge 1\\ \cos^2(xy)\le 1\end{cases}$ nên $2^{|y|}-\cos^2(xy)\ge 0$

Và $\left[2^{\sin x}-\cos(xy)\right]^2\ge 0$ nên $(1)\Leftrightarrow\begin{cases}2^{|y|}-\cos^2(xy)=0 & (2)\\ 2^{\sin x}-\cos(xy)=0 & (3)\end{cases}$

Xét phương trình (2):

Ta có: $\begin{cases}2^{|y|}=1\\ \cos^2(xy)=1\end{cases}\Leftrightarrow y=0$

Thay y = 0 vào phương trình (3) ta được: $2^{\sin x}-1=0\Leftrightarrow\sin x=0\Leftrightarrow x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $\begin{cases}x=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}\\ y=0\end{cases}.$

⇒ **Chọn (D).**

Lưu ý: $0\le\sin^2 x\le 1; 0\le\cos^2 x\le 1\ \forall x\in\mathbb{R}.$

D. Về đích

Bài tập 12 Số nghiệm của phương trình $|2015-x|^{2016}+|2016-x|^{2015}=1$ là:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Ta thấy x = 2016 và x = 2015 là 2 nghiệm của phương trình.

+ Nếu $x<2015$ thì $|2015-x|^{2016}>0$ và $|2016-x|^{2015}>1 \Rightarrow |2015-x|^{2016}+|2016-x|^{2015}>1$

Vậy x < 2015 không phải là nghiệm của phương trình.

+ Nếu $x>2016$ thì $|2015-x|^{2016}>1$ và $|2016-x|^{2015}>0 \Rightarrow |2015-x|^{2016}+|2016-x|^{2015}>1$

Vậy x > 2016 không phải là nghiệm của phương trình.

+ Nếu 2015 < x < 2016 thì:

Phương trình $\Leftrightarrow (x-2015)^{2016}+(2016-x)^{2015}=1$

Xét hàm số: $f(x)=(x-2015)^{2016}+(2016-x)^{2015}$ ta thấy:

$$\begin{cases}(x-2015)^{2016}<x-2015\\(2016-x)^{2015}<2016-x\end{cases} \Rightarrow (x-2015)^{2016}+(2016-x)^{2015}<1.$$

Do đó phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho có nghiệm x = 2015 và x = 2016. ⇒ **Chọn (C).**

Nhận xét: Trong bài tập trên ta đã sử dụng 2 mệnh đề sau:

+ Mệnh đề 1: Xét phương trình f(x) = a, trong đó f(x) là hàm số đơn điệu trên miền xác định của phương trình, khi đó phương trình có nghiệm duy nhất.

+ Mệnh đề 2: Xét phương trình f(x) = g(x), trong đó f(x) luôn đồng biến (hoặc nghịch biến) và g(x) luôn nghịch biến (hoặc đồng biến) trên miền xác định của phương trình thì khi đó phương trình có nghiệm duy nhất.

Một cách tổng quát: Nếu hàm số f(x) = a có m khoảng đơn điệu thì hàm số có nhiều nhất là m nghiệm.

Bài tập 13 Số nghiệm của phương trình $\frac{2^x}{4^x+1}+\frac{4^x}{2^x+1}+\frac{1}{2^x+4^x}=\frac{3}{2}$ là:

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Đặt $\begin{cases}a=2^x>0\\b=4^x>0\end{cases}$.

Khi đó phương trình đã cho trở thành: $\frac{a}{b+1}+\frac{b}{a+1}+\frac{1}{a+b}=\frac{3}{2}$.

Ta có: $VT=\left(\frac{a}{b+1}+1\right)+\left(\frac{b}{a+1}+1\right)+\left(\frac{1}{a+b}+1\right)-3$

$$=\frac{a+b+1}{b+1}+\frac{a+b+1}{a+1}+\frac{a+b+1}{a+b}-3$$

$$=\frac{1}{2}\left[(b+1)+(a+1)+(a+b)\right]\left(\frac{1}{b+1}+\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

$$\ge\frac{1}{2}.3\sqrt[3]{(b+1)+(a+1)+(a+b)}.3.\frac{1}{\sqrt[3]{(b+1)+(a+1)+(a+b)}}-3$$

$$\ge\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}=VP$$

Do đó $VT=VP\Leftrightarrow a+1=b+1=a+b\Leftrightarrow a=b-1\Leftrightarrow 2^x=4^x-1\Leftrightarrow x=0$

Vậy x = 0 là nghiệm duy nhất của phương trình. ⇒ **Chọn (B).**

Nhận xét: Bài này nhìn sẽ nhầm tưởng rằng có thể giải bằng cách sử dụng đặt ẩn phụ $t=2^x$ nhưng khi đó ta sẽ nhận được một phương trình bậc 6 mà phương trình bậc 6 thì hầu như chưa có một phương pháp giải cụ thể nào.

Số nghiệm của phương trình $3^x+2^x=3x+2$ là:

(A) 2; **(B)** 0; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Theo bất đẳng thức Becnuli ta có:

+ Với $x\ge 1$ hoặc $x<0$ ta có: $\begin{cases}3^x\ge 2x+1\\2^x\ge x+1\end{cases}\Rightarrow 3^x+2^x\ge 3x+2.$

Dấu "=" xảy ra ⇔ x = 0 hoặc x = 1.

+ Với $x\in(0;1)$ ta có: $\begin{cases}3^x<2x+1\\2^x<x+1\end{cases}\Rightarrow 3^x+2^x<3x+2\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Vậy phương trình có 2 nghiệm x = 0 hoặc x = 1. ⇒ **Chọn (A).**

Số nghiệm c ủa phương trình $9^{|x|}+3^{|x|}=10x+2$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Theo bất đẳng thức Becnuli ta có:

+ Với $x\ge 1$ thì $\begin{cases}9^{|x|}=9^x\ge 8x+1\\3^{|x|}=3^x\ge 2x+1\end{cases}\Rightarrow 9^{|x|}+3^{|x|}\ge 10x+2.$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow x=0$.

+ Với $x\in(0;1)$ ta có: $\begin{cases}9^{|x|}=9^x<8x+1\\3^{|x|}=3^x<2x+1\end{cases}\Rightarrow 9^{|x|}+3^{|x|}<10x+2.$

Do đó phương trình vô nghiệm nếu $x\in(0;1)$

Vậy phương trình có 2 nghiệm x = 0 và x = 1. ⇒ **Chọn (C).**

Nhận xét: Qua 2 bài tập trên ta thấy nếu gặp bài toán có dạng:

$a^x + b^x = cx + 2\ (a, b > 0; x = a + b - 2)$ thì phương pháp Becnuli được sử dụng là hiệu quả nhất bằng cách đánh giá theo từng trường hợp giống như trên.

Phương trình

$$3\log_3^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)+2\log_{\frac{1}{3}}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right).\log_3\left(9x^2\right)+\left(1-\log_{\frac{1}{3}}x\right)^2=0$$

(A) Vô nghiệm.

(B) Có 2 nghiệm phân biệt.

(C) Có duy nhất 1 nghiệm nguyên.

(D) Có duy nhất 1 nghiệm vô tỉ.

Giải:

Điều kiện: $0 < x \le 2$.

Khi đó, phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow 3\log_3^2\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)-2\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right).\left[2\log_3(3x)+\log_3^2(3x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[3\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)-\log_3(3x)\right].\left[\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)-\log_3(3x)\right]=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 3\log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)=\log_3(3x) & (1) \\ \log_3\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)=\log_3(3x) & (2) \end{array}\right.$$

Giải (2):

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}=3x \Leftrightarrow 4+2\sqrt{4-x^2}=9x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 4\left(4-x^2\right)=\left(9x^2-4\right)^2 \\ x \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\dfrac{68}{81} \\ x \ge \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x=\dfrac{2\sqrt{17}}{9} \text{ (Thỏa mãn)}$$

Giải (1):

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^3=3x$ (3)

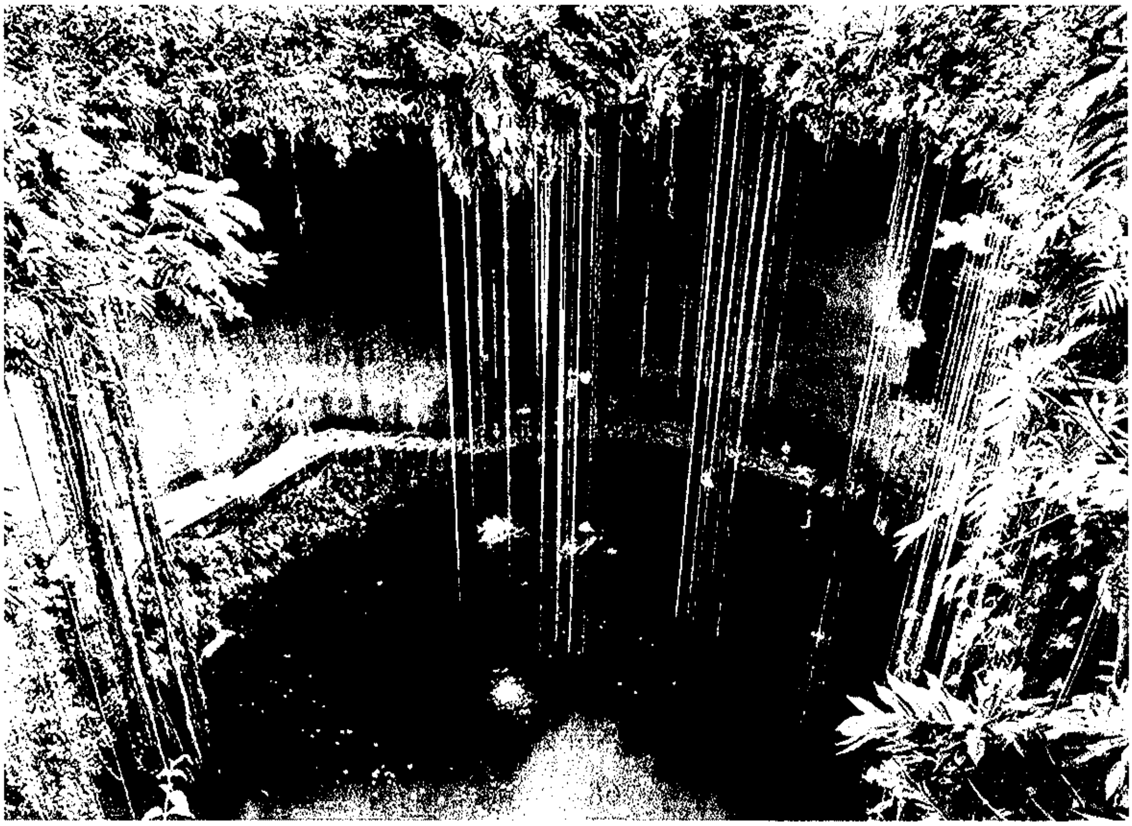
Vì $0 < x \le 2$ nên $3x \le 6$.

Mặt khác $\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^2=4+2\sqrt{4-x^2} \ge 4 \Rightarrow \left(\sqrt{2+x}+\sqrt{2-x}\right)^3 \ge 8$.

Do đó phương trình (3) vô nghiệm

Vậy phương trình đã cho có nghiệm duy nhất $x=\dfrac{2\sqrt{17}}{9}$ là số vô tỉ. $\Rightarrow$ Chọn (D).

Hố sụt ở bán đảo Yucatan, Mexico



Hố sụt tự nhiên xuất hiện ở bán đảo Yucatan là kết quả của sự sụp đổ những tảng đá vôi xốp do tác động của nguồn nước ngầm ở phía dưới. Nguồn nước ở đây trong vắt, tinh khiết, bắt nguồn từ những trận mưa ngấm dần xuống lớp đá vôi hình thành những giọt nước rơi xuống.

VẤN ĐỀ 3

BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

1. Phương pháp đưa về cùng cơ số

1.1) Cách giải:

Dùng các phép biến đổi tương đương đưa bất phương trình về các dạng:

a) Đối với bất phương trình mũ

◆ **Dạng 1:** $a^{f(x)} < a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right.$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] < 0 \end{cases}$.

◆ **Dạng 2:** $a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) \le g(x) \end{cases} \\ a = 1 \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) \ge g(x) \end{cases} \end{array}\right.$ hoặc $\begin{cases} a > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] \le 0 \end{cases}$.

Ví dụ 1: Vì 2 > 1 nên $2^{x^2} \ge 2^x \Leftrightarrow x^2 \ge x \Leftrightarrow x^2 - x \ge 0 \Leftrightarrow x(x-1) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge 1 \\ x \le 0 \end{array}\right.$.

Ví dụ 2: Vì $0 < \frac{1}{2} < 1$ nên $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x+1} < \left(\frac{1}{2}\right)^{x} \Leftrightarrow 2x + 1 > x \Leftrightarrow x > -1$.

b) Đối với bất phương trình logarit

◆ **Dạng 1:** $\log_a f(x) < \log_a g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < g(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} 0 < a \ne 1 \\ f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \\ (a-1)\left[f(x) - g(x)\right] < 0 \end{cases}$.

Ví dụ 3: Vì 3 > 1 nên $\log_3(2x+1) \le \log_3 3x \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 1 > 0 \\ 2x + 1 < 3x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -\frac{1}{2} \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$.

Ví dụ 4: Vì $0 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ nên $\log_{\frac{\sqrt{3}}{2}}(2x-1) \le \log_{\frac{\sqrt{3}}{2}} x^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 1 > 0 \\ 2x - 1 \le x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ (x-1)^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{2} \\ x \ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \ne 1$.

◆ **Dạng 2:** $\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \end{array}\right.$.

$\log_a f(x) > b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a > 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < a < 1 \\ 0 < f(x) < a^b \end{cases} \end{array}\right.$.

Ví dụ 5: Vì 2 > 1 nên $\log_2 x < 3 \Leftrightarrow 0 < x < 2^3 \Leftrightarrow 0 < x < 8$.

Ví dụ 6: Vì $0 < \dfrac{1}{5} < 1$ nên $\log_{\frac{1}{2}}(x+1) \geq 3 \Leftrightarrow 0 < x+1 \leq \left(\dfrac{1}{2}\right)^3$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 > 0 \\ x+1 \leq \dfrac{1}{8} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -1 \\ x \leq -\dfrac{7}{8} \end{cases} \Leftrightarrow -1 < x \leq -\dfrac{7}{8}$.

1.2) Bài tập

Nghiệm của bất phương trình $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{9x^2-15x+11} \geq \left(\dfrac{1}{3}\right)^{7-3x}$ là:

(A) $x \in \mathbb{R}$; **(B)** $x \leq \dfrac{2}{3}$; **(C)** $x \geq \dfrac{2}{3}$; **(D)** $x = \dfrac{2}{3}$.

Giải:

Bất phương trình đã cho xác định với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vì $0 < \dfrac{1}{3} < 1$ nên bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 9x^2 - 15x + 11 \leq 7 - 3x$

$\Leftrightarrow 9x^2 - 12x + 4 \leq 0 \Leftrightarrow (3x-2)^2 \leq 0$

$\Leftrightarrow x = \dfrac{2}{3}$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $x = \dfrac{2}{3}$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập vào máy tính biểu thức: $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{9x^2-15x+11} - \left(\dfrac{1}{3}\right)^{7-3x}$ (ta cần x để biểu thức dương)

Sau đó chúng ta CALC với các giá trị nghiệm thuộc khoảng (đoạn, nửa đoạn) của đáp án đề bài cho.

CALC với $x = \dfrac{2}{3}$ ta được giá trị biểu thức là: 0 như vậy $x = \dfrac{2}{3}$ là nghiệm của phương trình đã cho.

CALC với x = 1 kết quả bằng $\frac{-2}{243} < 0$ như vậy x = 1 không phải nghiệm.

CALC với x = -1 kết quả bằng $\frac{-2}{243} < 0$ như vậy x = -1 không phải nghiệm. Chọn D.

Chú ý: Đối với bài toán hỏi tập nghiệm của bất phương trình chúng ta đều có thể làm theo cách này.

Nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} > 4^{\frac{x}{x+1}}$ là:

(A) $x < -2$; **(B)** $-1 < x < 0$;

(C) $x > 0$; **(D)** x < -2 hoặc – 1 < x < 0.

Giải:

Điều kiện: $x \neq -1$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 2^{-2x} > 2^{\frac{2x}{x+1}}$ (1)

Vì 2 > 1 nên (1) $\Leftrightarrow -2x > \frac{2x}{x+1} \Leftrightarrow \frac{2x^2+4x}{x+1} < 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < -2 \\ -1 < x < 0 \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là: x < -2 hoặc – 1 < x < 0.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập $\left(\frac{1}{2}\right)^{2x} - 4^{\frac{x}{x+1}}$ (ta cần *x* để biểu thức dương)

CALC với $x = -3$ ta được kết quả là $56 > 0$ thỏa mãn.

CALC với $x = -\frac{1}{2}$ ta được kết quả là $\frac{7}{4} > 0$ thỏa mãn.

CALC với $x = 1$ ta được kết quả là $-\frac{7}{4} < 0$ không thỏa mãn.

Dựa vào các kết quả trên ta chọn D.

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{5}-2\right)^{\frac{x+1}{x+3}}$ là:

(A) $\left(-3;-\sqrt{5}\right) \cup \left(1;\sqrt{5}\right)$; **(B)** $\left(-3;\sqrt{5}\right)$;

(C) $\left(-\sqrt{5};\sqrt{5}\right)$; **(D)** $\varnothing$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \neq 0 \\ x+3 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq -3 \end{cases}$.

Ta có: $\left(\sqrt{5}+2\right)\left(\sqrt{5}-2\right) = 1 \Rightarrow \sqrt{5}-2 = \frac{1}{\sqrt{5}+2} = \left(\sqrt{5}+2\right)^{-1}$

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\sqrt{5}+2\right)^{\frac{x-3}{x-1}} < \left(\sqrt{5}+2\right)^{-\frac{x+1}{x+3}} \Leftrightarrow \frac{x-3}{x-1} < -\frac{x+1}{x+3}$

(Vì $\sqrt{5}+2>1$)

$\Leftrightarrow \frac{2x^2-10}{(x-1)(x+3)} < 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3<x<-\sqrt{5} \\ 1<x<\sqrt{5} \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$S=\left(-3;-\sqrt{5}\right)\cup\left(1;\sqrt{5}\right)$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Có thể sử dụng máy tính CASIO như 2 bài trên và các em có thể ứng dụng cách làm trên cho các bài dưới đây.

Bài tập 4 Tập nghiệm của bất phương trình $3^x < 27.9^{x^2}$ là:

(A) $\left(-1;\frac{3}{2}\right)$;

(B) $(-\infty;-1)$;

(C) $\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$;

(D) $(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3^x < 3^3.3^{2x^2} \Leftrightarrow 3^x < 3^{3+2x^2} \Leftrightarrow x < 3+2x^2$ (Vì $3>1$)

$\Leftrightarrow 2x^2-x-3>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>\frac{3}{2} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=(-\infty;-1)\cup\left(\frac{3}{2};+\infty\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý:

+ Với $0<a<1$ thì hàm số $y=f(x)=a^x$ là nghịch biến $\Rightarrow a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow f(x)\ge g(x)$.

+ Với $a>1$ thì hàm số $y=f(x)=a^x$ là đồng biến $\Rightarrow a^{f(x)} \le a^{g(x)} \Leftrightarrow 0<f(x)\le g(x)$.

Bài tập 4 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\frac{2x-1}{x+2}<1$ là:

(A) $S=(-\infty;-7)\cup\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$;

(B) $S=(-\infty;-7)\cup(-2;+\infty)$;

(C) $S=(-\infty;-7)$;

(D) $S=(-2;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $\frac{2x-1}{x+2}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>\frac{1}{2} \\ x<-2 \end{array}\right.$ (*)

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3\frac{2x-1}{x+2}<\log_3 3$.

Vì 3 > 1 nên $\frac{2x-1}{x+2} < 3 \Leftrightarrow 3 - \frac{2x-1}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \frac{x+7}{x+2} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > -2 \\ x < -7 \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện (*) ta có tập nghiệm của bất phương trình là:

$S = (-\infty; -7) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 6: Nghiệm của bất phương trình $\log_{\frac{1}{2}}\left(x^2 - 3x + 2\right) \geq -1$ là:

(A) $(-\infty; 0] \cup [3; +\infty)$;

(B) $(-\infty; 1) \cup [3; +\infty)$.

(C) $[0; 3]$;

(D) $[0; 1) \cup (2; 3]$.

Giải:

Điều kiện: $x^2 - 3x + 2 > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 2 \\ x < 1 \end{array}\right.$ (*)

Bất phương trình $\Leftrightarrow -\log_2\left(x^2 - 3x + 2\right) \geq -1 \Leftrightarrow \log_2\left(x^2 - 3x + 2\right) \leq 1$

Vì 2 > 1 nên bất phương trình $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \leq 2 \Leftrightarrow x^2 - 3x \leq 0 \Leftrightarrow 0 \leq x \leq 3$.

So sánh với điều kiện (*) ta có nghiệm của bất phương trình là: $[0; 1) \cup (2; 3]$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 7: Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{0,8}\left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4}\right) > 0$ là:

(A) $(8; +\infty)$;

(B) $(-4; -3) \cup (8; +\infty)$;

(C) $(-4; -3)$;

(D) $(-4; +\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $\frac{x^2 + x}{x + 4} > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -1 \\ x > 0 \end{array}\right.$ (*)

Khi đó, $(*) \Leftrightarrow \log_{0,8}\left(\log_6 \frac{x^2 + x}{x + 4}\right) < \log_{0,8} 1$

$\Leftrightarrow \log_6\left(\frac{x^2 + x}{x + 4}\right) > 1$ (Vì $0 < 0,8 < 1$)

$\Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} > 6 \Leftrightarrow \frac{x^2 + x}{x + 4} - 6 > 0 \Leftrightarrow \frac{x^2 - 5x - 24}{x + 4} > 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -4 < x < -3 \\ x > 8 \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện (*), ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $(-4; -3) \cup (8; +\infty)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nghiệm của bất phương trình $2\log_4(4x-3)+\log_{\frac{1}{4}}(2x+3)\le 2$ là:

(A) $\dfrac{7-2\sqrt{22}}{4}\le x\le\dfrac{7-2\sqrt{22}}{4}$; **(B)** $x\ge\dfrac{7+2\sqrt{22}}{4}$;

(C) $\dfrac{3}{4}<x\le\dfrac{7+2\sqrt{22}}{4}$; **(D)** $x\le\dfrac{7+2\sqrt{22}}{4}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}4x-3>0\\2x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow x>\dfrac{3}{4}\quad(*)$

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_4(4x-3)^2\le 2+\log_4(2x+3)$

$\Leftrightarrow \log_4(4x-3)^2\le\log_4\left[16(2x+3)\right]\Leftrightarrow(4x-3)^2\le 16(2x+3)$

$\Leftrightarrow 16x^2-56x-39\le 0\Leftrightarrow\dfrac{7-2\sqrt{22}}{4}\le x\le\dfrac{7-2\sqrt{22}}{4}$

So sánh với điều kiện (*), ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\dfrac{3}{4}<x\le\dfrac{7+2\sqrt{22}}{4}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý:

+ Với $a>1$ thì hàm số $y=f(x)=\log_a x$ là hàm số đồng biến:

$\Rightarrow \log_a f(x)\le\log_a g(x)\Leftrightarrow 0<f(x)\le g(x)$.

+ Với $0<a<1$ thì hàm số $y=f(x)=\log_a x$ là hàm số nghịch biến:

$\Rightarrow \log_a f(x)\le\log_a g(x)\Leftrightarrow 0<g(x)\le f(x)$.

Nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{3^{\sqrt{x^2-2x}}}\le 3^{x-1}$ là:

(A) $[1;+\infty)$; **(B)** $(1;+\infty)$; **(C)** $[1;2]$; **(D)** $[2;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $x^2-2x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le 0\end{array}\right.\quad(*)$

Khi đó, bất phương trình $\Leftrightarrow 3^{-\sqrt{x^2-2x}}\le 3^{x-1}\Leftrightarrow-\sqrt{x^2-2x}\le x-1$ (vì $3>1$)

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x}\ge 1-x\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}1-x\le 0\\ \begin{cases}1-x>0\\x^2-2x\ge(1-x)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 1\\ \begin{cases}x<1\\0\ge 1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow x\ge 1$$

So sánh với điều kiện (*) ta có nghiệm của bất phương trình là: $x \geq 2$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Cách giải bất phương trình:

$$\sqrt{f(x)} \geq g(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} g(x) \leq 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases} \\ \begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) \leq [g(x)]^2 \end{cases} \end{array}\right. .$$

Nghiệm của bất phương trình $\left(x^2+x+1\right)^x < 1$ là:

(A) $x < -1$; **(B)** $x > -1$; **(C)** $0 < x < 1$; **(D)** $-1 < x < 0$.

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(x^2+x+1\right)^x < \left(x^2+x+1\right)^0$ (1)

Ta có: $x^2+x+1 = \left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0\ \forall x$

$+$ Nếu $x^2+x+1 > 1 \Leftrightarrow x^2+x > 0 \Leftrightarrow x(x+1) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > 0 \\ x < -1 \end{array}\right.$ thì $(1) \Leftrightarrow x < 0$

$\Rightarrow x < -1$.

$+$ Nếu $x^2+x+1 < 1 \Leftrightarrow x^2+x < 0 \Leftrightarrow x(x+1) < 0 \Leftrightarrow -1 < x < 0$ thì $(1) \Leftrightarrow x > 0$

$\Rightarrow$ Vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x < -1$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bất phương trình $\log_x(2x-1) > \log_x\left(x^2-4\right)$

(A) Vô nghiệm.

(B) Có tập nghiệm là $(2;3)$.

(C) Có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(D) Có tập nghiệm là $(-\infty;2) \cup (3;+\infty)$.

Giải:

$$\text{Bất phương trình đã cho} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x > 1 \\ x^2-4 > 0 \\ 2x-1 > x^2-4 \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 1 \\ 2x-1 > 0 \\ 2x-1 < x^2-4 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right. \\ x^2-2x-3<0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ x>\dfrac{1}{2} \\ x^2-2x-3>0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ \left[\begin{array}{l} x>2 \\ x<-2 \end{array}\right. \\ -1<x<3 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ x>\dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} x<-1 \\ x>3 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow 2<x<3.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x \in (2;3)$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 12. Bất phương trình $\log_x\left(5x^2-4x+1\right)>2$

(A) Vô nghiệm. **(B)** Có tập nghiệm là $\mathbb{R}$.

(C) Có tập nghiệm là $(1;+\infty)$. **(D)** Có tập nghiệm là $(-\infty;1)$.

Giải:

Cách 1: Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ 5x^2-4x+1>x^2 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 0<5x^2-4x+1<x^2 \end{cases} \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ 4x^2-4x+1>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ 4x^2-4x+1<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x>1 \\ (2x-1)^2>0 \end{cases} \\ \begin{cases} 0<x<1 \\ (2x-1)^2<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x>1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 1$.

Cách 2: Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_x\left(5x^2-4x+1\right)>\log_x x^2$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1 \\ 5x^2-4x+1>0 \\ x^2>0 \\ (x-1)\left(5x^2-4x+1-x^2\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1 \\ (x-1)\left(4x^2-4x+1\right)>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 0<x\neq 1 \\ (x-1)(2x-1)^2>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $x > 1$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Đối với bất phương trình: $\log_{f(x)} u(x) < \log_{f(x)} v(x)$ thì cần xét các trường hợp của f(x).

Khi đó, bất phương trình $\Leftrightarrow \log_{f(x)} u(x) < \log_{f(x)} v(x) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) > 1 \\ 0 < u(x) < v(x) \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < f(x) < 1 \\ u(x) > v(x) > 0 \end{cases} \end{array}\right.$

Bài tập 13 Tập nghiệm của bất phương trình $5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 1$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $\varnothing$; **(C)** $(-\infty;0)$; **(D)** $(0;+\infty)$.

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow 5^{\log_3 \frac{x-2}{x}} < 5^0 \quad (1)$

Vì 5 > 1 nên bất phương trình $\Leftrightarrow \log_3 \frac{x-2}{x} < 0 \Leftrightarrow \log_3 \frac{x-2}{x} < \log_3 1 \Leftrightarrow \frac{x-2}{x} < 1$ (Vì 3 > 1)

$\Leftrightarrow \frac{x-2}{x} - 1 < 0 \Leftrightarrow \frac{-2}{x} < 0 \Leftrightarrow x > 0.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $(0;+\infty)$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 14 Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\frac{2}{5}\right)^{\frac{6-5x}{2+5x}} \le \frac{25}{4}$ là:

(A) $\left(-\infty;-\frac{22}{15}\right) \cup \left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$; **(B)** $\left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$;

(C) $\left(-\infty;-\frac{22}{15}\right)$; **(D)** $\left(-\frac{22}{15};-\frac{2}{5}\right)$.

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^{-\frac{6-5x}{2+5x}} \le \left(\frac{5}{2}\right)^2 \Leftrightarrow -\frac{6-5x}{2+5x} \le \frac{5}{2}$ (Vì $\frac{5}{2} > 1$)

$\Leftrightarrow \frac{6-5x}{2+5x} + \frac{5}{2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{15x+22}{2(2+5x)} \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \ge -\frac{2}{5} \\ x < -\frac{22}{15} \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là:

$\left(-\infty;-\frac{22}{15}\right) \cup \left(-\frac{2}{5};+\infty\right)$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nghiệm của bất phương trình $\log_3\sqrt{x^2-5x+6}+\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{x-2}>\frac{1}{2}\log_{\frac{1}{3}}(x+3)$ là:

(A) $x<\sqrt{10}$; **(B)** $x>\sqrt{10}$; **(C)** $x<-\sqrt{10}$; **(D)** $x<10$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x^2-5x+6>0\\x-2>0\\x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x>3\\x<2\end{array}\right.\\x>2\\x>-3\end{cases}\Leftrightarrow x>3.$

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow\frac{1}{2}\log_3(x^2-5x+6)-\frac{1}{2}\log_3(x-2)>-\frac{1}{2}\log_3(x+3)$

$\Leftrightarrow\log_3(x-2)(x-3)>\log_3(x-2)-\log_3(x+3)=\log_3\frac{x-2}{x+3}$

$\Leftrightarrow(x-2)(x-3)>\frac{x-2}{x-3}\Leftrightarrow x^2-9>1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>\sqrt{10}\\x<-\sqrt{10}\end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, suy ra nghiệm của bất phương trình là: $x>\sqrt{10}$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nghiệm của bất phương trình $5^{\sqrt{x^2-2x}}\ge\left(\frac{1}{5}\right)^{x-|x-1|}$ là:

(A) $x\le 2$; **(B)** $x<2$; **(C)** $x\ge 2$; **(D)** $x\le 0$.

Giải:

Điều kiện: $x^2-2x\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 2\\x\le 0\end{array}\right.$.

Theo đề bài ta có:

$$5^{\sqrt{x^2-2x}}\ge\left(\frac{1}{5}\right)^{x-|x-1|}\Leftrightarrow 5^{\sqrt{x^2-2x}}\ge 5^{-x+|x-1|}\Leftrightarrow\sqrt{x^2-2x}\ge -x+|x-1| \qquad (1)$$

+ Với $x\ge 2$, ta có $x-1>0$ nên $|x-1|=x-1$. Khi đó, (1) trở thành:

$\sqrt{x^2-2x}\ge -1$ thỏa mãn với mọi $x\ge 2$

+ Với $x\le 0$, ta có $x-1<0$ nên $|x-1|=1+x$. Khi đó, (1) trở thành:

$\sqrt{x^2-2x}\ge -2x+1\Leftrightarrow x^2-2x\ge(-2x+1)^2\Leftrightarrow 3x^2-2x+1\le 0$ bất phương trình này vô nghiệm với $\forall x\le 0$.

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là: $x\ge 2$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{3x-x^2}(3-x)>1$ là:

(A) $(0;3)$; **(B)** $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};1\right)$;

(C) $\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};1\right)$; **(D)** $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};1\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$.

Giải:

Ta có: $\log_{3x-x^2}(3-x)>1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}3x-x^2>1\\3-x>3x-x^2\end{cases} & (1)\\ \begin{cases}0<3x-x^2<1\\3-x<3x-x^2\end{cases} & (2)\end{array}\right.$

Giải (1):

$$\begin{cases}3x-x^2>1\\3-x>3x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-3x+1<0\\x^2-4x+3>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ \left[\begin{array}{l}x<1\\x>3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}<x<1$$

Giải (2):

$$\begin{cases}0<3x-x^2<1\\0<3-x<3x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x-x^2>0\\x^2-3x+1>0\\x^2-4x+3<0\\x<3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<x<3\\ \left[\begin{array}{l}x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\\x>\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\end{array}\right.\\1<x<3\\x<3\end{cases}\Leftrightarrow\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}<x<3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2};1\right)\cup\left(\dfrac{3+\sqrt{5}}{2};3\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}-1\right)^{-x}$ là:

(A) $[-1;2]\cup[3;+\infty)$; **(B)** $[-1;2]$;

(C) $[3;+\infty)$; **(D)** $(-\infty;2]\cup[3;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $x\ne 1$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}\right)^{x}\Leftrightarrow\left(\sqrt{2}+1\right)^{\frac{6x-6}{x+1}}\le\left(\sqrt{2}+1\right)^{x}$

Do $\sqrt{2}+1>1$ nên bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{6x-6}{x+1}\le x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1\\6x-6\le x^2+x\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\6x-6\ge x^2+x\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1\\x^2-5x+6\ge 0\end{cases}\\ \begin{cases}x<-1\\x^2-5x+6\le 0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \begin{cases}x>-1\\ \left[\begin{array}{l}x\le 2\\x\ge 3\end{array}\right.\end{cases}$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là: $\left[\begin{array}{l}-1\le x\le 2\\x\ge 3\end{array}\right.$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 19 Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\log_2(x+1)^2-\log_3(x+1)^3}{x^2-3x-4}>0$ là:

(A) $(4;+\infty)$; **(B)** $(-1;0)$;

(C) $(-1;+\infty)$; **(D)** $(-1;0)\cup(4;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\x^2-3x-4\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow -1<x\ne 4.$

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{2\log_2(x+1)-3\log_3(x+1)}{x^2-3x-4}>0$

$$\Leftrightarrow \frac{2\log_2(x+1)-3\log_3 2.\log_2(x+1)}{x^2-3x-4}>0$$

$$\Leftrightarrow (\log_3 9-\log_3 8).\frac{\log_2(x+1)}{x^2-3x-4}>0\Leftrightarrow \frac{\log_2(x+1)}{x^2-3x-4}>0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\log_2(x+1)>0\\x^2-3x-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}\log_2(x+1)<0\\x^2-3x-4<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x+1>0\\x^2-3x-4>0\end{cases}\\ \begin{cases}0<x+1<1\\x^2-3x-4<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x>-1\\ \left[\begin{array}{l}x>4\\x<-1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}-1<x<0\\-1<x<4\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>4\\-1<x<0\end{array}\right..$$

So sánh với điều kiện, suy ra nghiệm của bất phương trình đã cho là: x > 4 hoặc -1 < x < 0.

Chọn (D).

Bài tập 20 Tập nghiệm của bất phương trình $4x^2+x.2^{x^2+1}+3.2^{x^2}>x^2.2^{x^2}+8x+12$ là:

(A) $\left(-\sqrt{2};-1\right)$; **(B)** $\left(\sqrt{2};3\right)$;

(C) $\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(\sqrt{2};3\right)$; **(D)** $\left(-\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow x^2\left(2^{x^2}-4\right)-2x\left(2^{x^2}-4\right)-3\left(2^{x^2}-4\right)<0$

$\Leftrightarrow \left(2^{x^2}-4\right)\left(x^2-2x-3\right)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2^{x^2}-4<0\\ x^2-2x-3>0\end{cases} \quad (1)\\ \begin{cases}2^{x^2}-4>0\\ x^2-2x-3<0\end{cases} \quad (2)\end{array}\right.$$

Giải (1):

$$\begin{cases}2^{x^2}-4<0\\ x^2-2x-3>0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2<2\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-\sqrt{2}<x<\sqrt{2}\\ \left[\begin{array}{l}x<-1\\ x>3\end{array}\right.\end{cases} \Leftrightarrow -\sqrt{2}<x<-1$$

Giải (2):

$$\begin{cases}2^{x^2}-4>0\\ x^2-2x-3<0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2>2\\ -1<x<3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<-\sqrt{2}\\ x>\sqrt{2}\end{array}\right.\\ -1<x<3\end{cases} \Leftrightarrow \sqrt{2}<x<3$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\left(-\sqrt{2};-1\right)\cup\left(\sqrt{2};3\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Đầu tiên ta đã biến đổi bất phương trình đã cho về bất phương trình tích A.B < 0.

$$\text{Và } A.B<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}A<0\\ B>0\end{cases}\\ \begin{cases}A>0\\ B<0\end{cases}\end{array}\right..$$

2. Phương pháp mũ hóa - lôgarit hóa

2.1) Cách giải:

a) Đối với bất phương trình mũ

◆ **Dạng 1:** Bất phương trình: $\begin{cases}a^{f(x)}<b\\ b>0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ f(x)<\log_a b\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ f(x)>\log_a b\end{cases}\end{array}\right.$

◆ **Dạng 2:** Bất phương trình: $a^{f(x)}>b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ f(x)\neq 0\end{cases}\\ \begin{cases}b<0\\ \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a>1\\ f(x)>\log_a b\end{cases}\\ \begin{cases}0<a<1\\ f(x)<\log_a b\end{cases}\end{array}\right.\end{cases}\end{array}\right.$

◆ **Dạng 3:** Bất phương trình: $a^{f(x)} > b^{g(x)} \Leftrightarrow \log a^{f(x)} > \log b^{g(x)}$

$\Leftrightarrow f(x).\log a > g(x).\log b$ hoặc có thể sử dụng theo cơ số a hoặc b.

Ví dụ 1: Vì $2 > 1$ nên $2^x > 3 \Leftrightarrow x > \log_2 3$.

Ví dụ 2: Vì $0 < \frac{1}{2} < 1$ nên $\left(\frac{1}{2}\right)^x < 5 \Leftrightarrow x > \log_{\frac{1}{2}} 5 = -\log_2 5$.

Ví dụ 3: $3^{2x} > 5^{x-1} \Leftrightarrow \log 3^{2x} > \log 5^{x-1} \Leftrightarrow 2x\log 3 > (x-1)\log 5$

$\Leftrightarrow (2\log 3 - \log 5).x > -\log 5 \Leftrightarrow (\log 9 - \log 5).x > -\log 5$

$\Leftrightarrow x > -\dfrac{\log 5}{\log 9 - \log 5} = -\dfrac{\log 5}{\log \frac{9}{5}} = -\log_{\frac{9}{5}} 5$.

Hoặc có thể lấy loga cơ số 3 (hoặc 5) hai vế của bất phương trình đã cho như sau:

$3^{2x} > 5^{x-1} \Leftrightarrow \log_3 3^{2x} > \log_3 5^{x-1} \Leftrightarrow 2x > (x-1)\log_3 5 \Leftrightarrow (2 - \log_3 5).x > -\log_3 5$

$\Leftrightarrow (\log_3 9 - \log_3 5).x > -\log_3 5 \Leftrightarrow \log_3 \frac{9}{5}.x > -\log_3 5 \Leftrightarrow x > -\dfrac{\log_3 5}{\log_3 \frac{9}{5}} \Leftrightarrow x > -\log_{\frac{9}{5}} 5$.

b) Đối với bất phương trình logarit

◆ **Dạng 1:** $\log_a b < c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > a^c \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < a^c \end{cases} \end{array}\right.$.

◆ **Dạng 2:** $\log_a b > \log_a c \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 0 < a < 1 \\ b > c > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} a > 1 \\ 0 < b < c \end{cases} \end{array}\right.$.

Ví dụ 4: Vì $3 > 1$ nên $\log_3 x < 4 \Leftrightarrow 0 < x < 3^4 \Leftrightarrow 0 < x < 81$.

Ví dụ 5: Vì $0 < \frac{1}{2} < 1$ nên $\log_{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x+1) > 4 \Leftrightarrow 2x + 1 > \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^4$

$\Leftrightarrow 2x + 1 > \frac{1}{4} \Leftrightarrow 2x > -\frac{3}{4} \Leftrightarrow x > -\frac{3}{8}$.

2.2) Bài tập

Tập nghiệm của bất phương trình $x^{\log_2 x} < 16$ là:

(A) $\left(\frac{1}{4}; 4\right)$; (B) $(4; +\infty)$; (C) $\left(-\infty; \frac{1}{4}\right)$; (D) $\varnothing$.

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Lấy logarit cơ số 2 hai vế ta được:

$\log_2 x^{\log_2 x} < \log_2 16 \Leftrightarrow (\log_2 x)^2 < 4 \Leftrightarrow -2 < \log_2 x < 2 \Leftrightarrow \frac{1}{4} < x < 4.$

So sánh với điều kiện, ta có tập nghiệm của bất phương trình là: $S = \left(\frac{1}{4}; 4\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Tập nghiệm của bất phương trình $5^{2x-1} < 3^{3-x}$ là:

(A) $\left(\frac{3\log 3 + 5\log 5}{2\log 5 + \log 3}; +\infty\right)$;
(B) $\left(-\infty; \frac{3\log 3 + 5\log 5}{2\log 5 + \log 3}\right)$;

(C) $\mathbb{R}$;
(D) $\varnothing$.

Giải:

Lấy log hai vế ta được: $(2x-1)\log 5 < (3-x)\log 3 \Leftrightarrow (2\log 5 + \log 3)x < 3\log 3 + 5\log 5$

$\Leftrightarrow x < \frac{3\log 3 + 5\log 5}{2\log 5 + \log 3}$ (Vì $2\log 5 + \log 3 > 0$)

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left(-\infty; \frac{3\log 3 + 5\log 5}{2\log 5 + \log 3}\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Có thể lấy logarit cơ số 5 hoặc cơ số 3 hai vế.

Tập nghiệm của bất phương trình $(x^2 - x + 1)^{x^2+2x} \le 1$ là:

(A) $[-2;0)$;
(B) $(0;1)$;
(C) $(-\infty;0) \cup (1;+\infty)$;
(D) $[-2;1)$.

Giải:

Nhận xét rằng: $x^2 - x + 1 > 0, \forall x \in \mathbb{R}$.. Do đó, ta xét các trường hợp sau:

+ Nếu $x^2 - x + 1 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right.$

Thử lại ta thấy rằng: $x = 0$ hoặc $x = 1$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

+ Nếu $x^2 - x + 1 > 1$, khi đó bất phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - x + 1 > 1 \\ x^2 + 2x \le 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x > 1 \end{array}\right. \\ -2 \le x \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow -2 \le x < 0$$

+ Nếu $0 < x^2 - x + 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 1$, khi đó bất phương trình luôn đúng.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $[-2;1)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 4 Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}+3^{x+2}\ge 2^{x+2}+3^{x+1}$ là:

(A) $\left[-\log_{\frac{3}{2}}2;+\infty\right)$; **(B)** $\left(-\infty;-\log_{\frac{3}{2}}2\right]$; **(C)** $\left(-\log_{\frac{3}{2}}2;+\infty\right)$; **(D)** $\varnothing$.

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2.2^x+9.3^x\ge 4.2^x+3.3^x$

$$\Leftrightarrow 9.3^x-3.3^x\ge 4.2^x-2.2^x\Leftrightarrow 6.3^x\ge 2.2^x\Leftrightarrow\left(\frac{3}{2}\right)^x\ge\frac{1}{2}\Leftrightarrow x\ge\log_{\frac{3}{2}}\frac{1}{2}=-\log_{\frac{3}{2}}2$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\left[-\log_{\frac{3}{2}}2;+\infty\right)$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 5 Tập nghiệm của bất phương trình $25.2^{x^2}>16.5^x$ là:

(A) $\left(-\infty;\log_2\frac{5}{4}\right)$; **(B)** $(2;+\infty)$;

(C) $\left(\log_2\frac{5}{4};2\right)$; **(D)** $\left(-\infty;\log_2\frac{5}{4}\right)\cup(2;+\infty)$.

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow\frac{2^{x^2}}{2^4}>\frac{5^x}{5^2}\Leftrightarrow 2^{x^2-4}>5^{x-2}$

Lấy logarit cơ số 2 hai vế, ta được: $x^2-4>(x-2)\log_2 5\Leftrightarrow(x-2)(x+2)>(x-2)\log_2 5$

$$\Leftrightarrow(x-2)(x+2-\log_2 5)>0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<\log_2 5-2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x>2\\ x<\log_2\frac{5}{4}\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình là: $\left(-\infty;\log_2\frac{5}{4}\right)\cup(2;+\infty)$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Có thể lấy logarit cơ số 5 hoặc lấy log hai vế của bất phương trình: $2^{x^2-4}>5^{x-2}$ thay vì lấy logarit cơ số 2.

C. Tăng tốc

Bài tập 6 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{x\sqrt{3}}\left(5x^2-18x+16\right)>2$ là:

(A) $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};1\right)$; **(B)** $(8;+\infty)$; **(C)** $\left(\frac{1}{\sqrt{3}};1\right)\cup(8;+\infty)$; **(D)** $\left(0;\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Giải:

Ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $x\sqrt{3}>1\Leftrightarrow x>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 5x^2-18x+16>\left(x\sqrt{3}\right)^2=3x^2$

$\Leftrightarrow 2x^2-18x+16>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<1 \\ x>8 \end{array}\right.$

$\Rightarrow$ Bất phương trình có nghiệm là: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<1$ hoặc $x>8$.

+ Trường hợp 2: $0<x\sqrt{3}<1 \Leftrightarrow 0<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 0<5x^2-18x+16<\left(x\sqrt{3}\right)^2=3x^2$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-18x+16>0 \\ 2x^2-18x+16>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5x^2-18x+16>0 \\ 1<x<8 \end{cases}$

Do $1<x<8$ không thỏa mãn điều kiện $0<x<\dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\dfrac{1}{\sqrt{3}}<x<1$ hoặc $x>8$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nghiệm của bất phương trình $\log_x\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\geq 2$ là:

(A) $x>1$; **(B)** $x<\dfrac{1}{4}$; **(C)** $x>1$ hoặc $x<\dfrac{1}{4}$; **(D)** $\dfrac{1}{4}<x<1$.

Giải:

Ta xét hai trường hợp sau:

+ Trường hợp 1: $x>1$, khi đó:

$\log_x\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\geq 2 \Leftrightarrow x-\dfrac{1}{4}\geq x^2 \Leftrightarrow x^2-x+\dfrac{1}{4}\leq 0 \Leftrightarrow \left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2\leq 0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

Với $x=\dfrac{1}{2}$ không thỏa mãn điều kiện $x>1 \Rightarrow$ bất phương trình vô nghiệm.

+ Trường hợp 2: $0<x<1$, khi đó:

$\log_x\left(x-\dfrac{1}{4}\right)\geq 2 \Leftrightarrow 0<x-\dfrac{1}{4}\leq x^2 \Leftrightarrow \begin{cases} x-\dfrac{1}{4}>0 \\ x-\dfrac{1}{4}\leq x^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>\dfrac{1}{4} \\ x^2-x+\dfrac{1}{4}\geq 0 \end{cases}$

Với điều kiện $0<x<1 \Rightarrow \dfrac{1}{4}<x<1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình là: $\dfrac{1}{4}<x<1$. $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}\geq 0$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $\varnothing$;

(C) $\{5\}$; **(D)** $\{5\}\cup\left(4+\sqrt{2};+\infty\right)$.

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}=0 \\ \dfrac{\sqrt{x-5}}{\log_{\sqrt{2}}(x-4)-1}>0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ \begin{cases} x>5 \\ x>4+\sqrt{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=5 \\ x>4+\sqrt{2} \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left[\begin{array}{l} x=5 \\ x>4+\sqrt{2} \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{2.3^x-2^{x+2}}{3^x-2^x}\le 1$ là:

(A) $(0;+\infty)$; **(B)** $\left(0;\log_{\frac{3}{2}}3\right)$; **(C)** $(-\infty;0)$; **(D)** $\left(\log_{\frac{3}{2}}3;+\infty\right)$.

Giải:

Bất phương trình $\Leftrightarrow \dfrac{2.3^x-4.2^x-\left(3^x-2^x\right)}{3^x-2^x}\le 0 \Leftrightarrow \dfrac{3^x-3.2^x}{3^x-2^x}\le 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 3^x\le 3.2^x \\ 3^x>2^x \end{cases} \\ \begin{cases} 3^x\ge 3.2^x \\ 3^x<2^x \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x\le 3 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x>1 \end{cases} \\ \begin{cases} \left(\dfrac{3}{2}\right)^x\ge 3 \\ \left(\dfrac{3}{2}\right)^x<1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\log_{\frac{3}{2}}3 \\ \log_{\frac{3}{2}}3<x<0 \quad (\text{VN}) \end{array}\right. \Leftrightarrow 0<x<\log_{\frac{3}{2}}3$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $0<x<\log_{\frac{3}{2}}3$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

3. Phương pháp đặt ẩn phụ

3.1) Cách giải: Sử dụng các cách đặt ẩn phụ như ở phần giải phương trình và sử dụng các phép biến đổi tương đương, tính chất đơn điệu của hàm số mũ và logarit để giải.

Lưu ý: Khi đặt ẩn phụ, ta cần tìm điều kiện cho ẩn phụ và trong các bài toán có chứa tham số thì việc tìm điều kiện cho ẩn phụ là hết sức quan trọng.

3.2) Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1 Nghiệm của bất phương trình $2^x - 4.2^{-x} + 3 < 0$ là:

(A) $x < 2;$ **(B)** $x > 2;$ **(C)** $0 < x < 1;$ **(D)** $x > 1.$

Giải:

Đặt $t = 2^x > 0$. Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành:

$$t - 4.\frac{1}{t} + 3 < 0 \Leftrightarrow t^2 + 3t - 4 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(t+4) < 0 \Leftrightarrow -4 < t < 1$$

So sánh với điều kiện $t > 0 \Rightarrow 0 < t < 1$

Với $0 < t < 1$ thì $2^x < 4 \Leftrightarrow x < 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < 2$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 2 Nghiệm của bất phương trình $(2,5)^x - 2.(0,4)^{x+1} + 1,6 < 0$ là:

(A) $0 < x < \frac{2}{5};$ **(B)** $x < -1;$ **(C)** $x < 0;$ **(D)** $x > -1.$

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x - \frac{4}{5}.\left(\frac{2}{5}\right)^x + \frac{8}{5} < 0 \ (1)$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x > 0$. Khi đó, bất phương trình (1) trở thành:

$t - \frac{4}{5}.\frac{1}{t} + \frac{8}{5} < 0 \Leftrightarrow 5t^2 + 8t - 4 < 0 \Leftrightarrow -2 < t < \frac{2}{5}$. Mà $t > 0$ nên $0 < t < \frac{2}{5}$

$$\Rightarrow \left(\frac{5}{2}\right)^x < \frac{2}{5} = \left(\frac{5}{2}\right)^{-1} \Leftrightarrow x < -1.$$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < -1$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 3 Nghiệm của bất phương trình $2.10^x + 3.25^x - 4^x \geq 0$ là:

(A) $x \geq \frac{1}{3};$ **(B)** $x \leq -1;$

(C) $x \leq -1$ hoặc $x \geq \frac{1}{3};$ **(D)** $x \geq -\log_{\frac{5}{2}} 3.$

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2.\left(\frac{5}{2}\right)^x + 3.\left(\frac{5}{2}\right)^{2x} - 1 \geq 0.$

Đặt $t = \left(\frac{5}{2}\right)^x > 0$. Bất phương trình đã cho trở thành: $3t^2 + 2t - 1 \geq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \geq \frac{1}{3} \\ t \leq -1 \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện $t > 0 \Rightarrow t \geq \frac{1}{3}$

Với $t \geq \frac{1}{3}$ thì $\left(\frac{5}{2}\right)^x \geq \frac{1}{3} \Leftrightarrow x \geq \log_{\frac{5}{2}} \frac{1}{3} = -\log_{\frac{5}{2}} 3.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \geq -\log_{\frac{5}{2}} 3.$ $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 4 Nghiệm của bất phương trình $4^{\frac{1}{x}-1} - 2^{\frac{1}{x}-2} - 3 \leq 0$ là:

(A) $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right)$; **(B)** $x \in \left(0; \frac{1}{2}\right]$;

(C) $x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$; **(D)** $x \in (-\infty; 0) \cup \left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$.

Giải:

Điều kiện: $x \neq 0$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{1}{4}.2^{\frac{2}{x}} - \frac{1}{4}.2^{\frac{1}{x}} - 3 \leq 0.$

Đặt $t = 2^{\frac{1}{x}} > 0$. Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành:

$\frac{1}{4}t^2 - \frac{1}{4}t - 3 \leq 0 \Leftrightarrow t^2 - t - 12 \leq 0 \Leftrightarrow (t-4)(t+3) \leq 0 \Leftrightarrow -3 \leq t \leq 4$

Vì $t > 0$ nên $0 < t \leq 4$. Khi đó $2^{\frac{1}{x}} \leq 4 \Leftrightarrow 2^{\frac{1}{x}} \leq 2^2 \Leftrightarrow \frac{1}{x} \leq 2 \Leftrightarrow \frac{1-2x}{x} \leq 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 0 \\ x \geq \frac{1}{2} \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \in (-\infty; 0) \cup \left[\frac{1}{2}; +\infty\right)$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 5 Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x + \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x \leq 2$ là:

(A) $(0; +\infty)$; **(B)** $[0; +\infty)$; **(C)** $(-\infty; 0]$; **(D)** $\{0\}$.

Giải:

Vì $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right) = 3 - 2 = 1$ nên đặt $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x = t > 0 \Rightarrow \left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)^x = \frac{1}{t}$.
Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành: $t + \frac{1}{t} = 2 \Leftrightarrow t^2 - 2t + 1 = 0 \Leftrightarrow (t-1)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 1$ (thỏa mãn)

Với $t = 1$ thì $\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)^x = 1 \Leftrightarrow x = 0.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x = 0$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 6 Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $\log_{\frac{1}{2}}^2 x - 6\log_2 x + 8 \le 0$.

(A) $[4;16]$; (B) $\{4;16\}$; (C) $(-\infty;4]$; (D) $[16;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2^2 x - 6\log_2 x + 8 \le 0$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$ thì (1) trở thành: $t^2 - 6t + 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 4 \end{array}\right.$.

+ Với t =2 thì $\log_2 x = 2 \Leftrightarrow x = 4$ (thỏa mãn)

+ Với t = 4 thì $\log_2 x = 4 \Leftrightarrow x = 16$ (thỏa mãn)

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: x = 4 và x = 16. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 7 Tìm nghiệm của bất phương trình: $\log_2 x + 2\log_x 4 - 3 \le 0$.

(A) $0 < x < 1$; (B) $x < 1$; (C) $x > 0$; (D) $x > 1$.

Giải:

Điều kiện: $0 < x \ne 1$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2 x + 4\log_x 2 - 3 \le 0$

$\Leftrightarrow \log_2 x + \dfrac{4}{\log_2 x} - 3 \le 0$ (1)

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow$ (1) trở thành: $t + \dfrac{4}{t} - 3 \le 0 \Leftrightarrow \dfrac{t^2 - 3t + 4}{t} \le 0$ (2)

Ta có: $t^2 - 3t + 4 = \left(t - \dfrac{3}{2}\right)^2 + \dfrac{7}{4} \ge \dfrac{7}{4} > 0$ nên $(2) \Leftrightarrow t < 0$

Với $t < 0$ thì $\log_2 x < 0 \Leftrightarrow 0 < x < 1$

So sánh với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là: $0 < x < 1$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 8 Tìm nghiệm của bất phương trình: $3^{x+1} - 2^{2x+1} - 12^{\frac{x}{2}} < 0$.

(A) $-\dfrac{2}{3} < x < 1$; (B) $x < 2$; (C) $x > 2$; (D) $x < 1$.

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 3.3^x - 2.4^x - 3^{\frac{x}{2}}.4^{\frac{x}{2}} < 0$

$\Leftrightarrow 3.\left(\dfrac{3}{4}\right)^x - 2 - \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}} < 0.$

Đặt $t = \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}}$. Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành:

$3t^2 - t - 2 < 0 \Leftrightarrow (t-1)(3t+2) < 0 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} < t < 1.$

Ta có: $-\dfrac{2}{3} < t < 1 \Leftrightarrow -\dfrac{2}{3} < \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}} < 1 \Leftrightarrow \left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{x}{2}} < \left(\dfrac{3}{4}\right)^{0} \Leftrightarrow \dfrac{x}{2} > 0 \Leftrightarrow x > 2$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > 2$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 9 Tìm nghiệm của bất phương trình: $\log_3(x+2) + \log_{x+2} 3 \ge \dfrac{5}{2}$.

(A) $x \in [7;+\infty) \cup \left(-2;\sqrt{2}-2\right]$; **(B)** $x \in [7;+\infty)$;

(C) $x \in \left(-2;\sqrt{2}-2\right]$; **(D)** $x \in (-\infty;-2)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2>0 \\ 0<x+2\ne 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-2 \\ -2<x\ne -1 \end{cases} \Leftrightarrow -2 < x \ne -1.$

Khi đó, bất phương trình đã cho trở thành: $t + \dfrac{1}{t} \ge \dfrac{5}{2} \Leftrightarrow 2t^2 - 5t + 2 \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 2 \\ t \le \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

+ Với $t \ge 2$ thì $\log_3(x+2) \ge 2 \Leftrightarrow x+2 \ge 9 \Leftrightarrow x \ge 7$ (Thỏa mãn)

+ Với $t \le \dfrac{1}{2}$ thì $\log_2(x+2) \le \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow 0 < x+2 \le \sqrt{2} \Leftrightarrow -2 < x \le \sqrt{2}-2$ (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \in [7;+\infty) \cup \left(-2;\sqrt{2}-2\right]$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 1 Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $4^{x+\sqrt{x-1}} - 5.2^{x+\sqrt{x-1}+1} + 16 \ge 0$.

(A) $\varnothing$; **(B)** $(2;+\infty)$; **(C)** $\{1\}$; **(D)** $\{1\} \cup (2;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $x - 1 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 2^{2(x+\sqrt{x-1})} - 10.2^{x+\sqrt{x-1}} + 16 \ge 0$ (1)

Đặt $t = 2^{x+\sqrt{x-1}} > 0$. Khi đó, (1) trở thành: $t^2 - 10t + 16 \ge 0 \Leftrightarrow (t-8)(t-2) \ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t \ge 8 \\ t \le 2 \end{array}\right.$.

Vì $t > 0$ nên $\left[\begin{array}{l} t \ge 8 \\ 0 < t \le 2 \end{array}\right.$.

+ Với $t \ge 8$ thì $2^{x+\sqrt{x-1}} > 8 \Leftrightarrow x + \sqrt{x-1} > 3 \Leftrightarrow \sqrt{x-1} > 3 - x$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 3-x<0 \\ \begin{cases} 3-x \ge 0 \\ x-1 > (3-x)^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ \begin{cases} x \le 3 \\ x^2 - 7x + 10 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>3 \\ \begin{cases} x \le 3 \\ 2 < x < 5 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow x > 2 \text{ (Thỏa mãn)}$$

+ Với $0 < t \le 2$ thì $0 < 2^{x+\sqrt{x-1}} \le 2 \Leftrightarrow x + \sqrt{x-1} \le 1$

$\Leftrightarrow x - 1 + \sqrt{x-1} \le 0 \Leftrightarrow \sqrt{x-1}\left(\sqrt{x-1}+1\right) \le 0$

$\Leftrightarrow \sqrt{x-1} \le 0 \Leftrightarrow x = 1$ (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: x = 1 hoặc x > 2. ⇒ **Chọn (B).**

Bài tập 11 Tập nghiệm của bất phương trình $6\log_3|1-x| + \log_3^2(x-1) + 5 \ge 0$ là:

(A) $\left(\frac{4}{3};+\infty\right)$; **(B)** $\left(1;\frac{244}{243}\right)$;

(C) $(-\infty;-5)\cup(-1;+\infty)$; **(D)** $\left(0;\frac{1}{243}\right)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}|1-x| > 0\\ x-1>0\end{cases} \Leftrightarrow x > 1.$

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_3^2(x-1) + 6\log_3(x-1) + 5 > 0$ (1)

Đặt $t = \log_3(x-1)$. Khi đó (1) trở thành: $t^2 + 6t + 5 > 0 \Leftrightarrow (t+1)(t+5) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t > -1\\ t < -5\end{array}\right.$.

+ Với t > -1 thì $\log_3(x-1) > -1 \Leftrightarrow x - 1 > \frac{1}{3} \Leftrightarrow x > \frac{4}{3}$.

So sánh với điều kiện ta có $x > \frac{4}{3}$ (2)

+ Với t < -5 thì $\log_3(x-1) < -5 \Leftrightarrow 0 < x - 1 < \frac{1}{243} \Leftrightarrow 1 < x < \frac{244}{243}$.

So sánh với điều kiện ta có: $1 < x < \frac{244}{243}$ (3)

Từ (2) và (3) ta có nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x > \frac{4}{3}$. ⇒ **Chọn (A).**

Lưu ý: Với điều kiện $x - 1 > 0 \Leftrightarrow x > 1$ thì $|1-x| = x - 1$.

Bài tập 12 Nghiệm của bất phương trình $6^{\log_6^2 x} + x^{\log_6 x} \le 12$ là:

(A) $[-1;1]$; **(B)** $\left[\frac{1}{6};6\right]$; **(C)** $\left(-\infty;\frac{1}{6}\right)$; **(D)** $(6;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Đặt $t = \log_6 x \Rightarrow x = 6^t \Rightarrow x^{\log_6 x} = \left(6^t\right)^t = 6^{t^2}$

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow 6^{t^2} + 6^{t^2} \le 12 \Leftrightarrow 6^{t^2} \le 6 \Leftrightarrow t^2 \le 1 \Leftrightarrow -1 \le t \le 1$

Với $-1 \le t \le 1$ thì $-1 \le \log_6 x \le 1 \Leftrightarrow 6^{-1} \le x \le 6 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \le x \le 6$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\frac{1}{6} \le x \le 6$. ⇒ **Chọn (B).**

Bài tập 13 Tập nghiệm của bất phương trình $25^{1+2x-x^2}+9^{1+2x-x^2}\ge 34.15^{2x-x^2}$ là:

(A) $[0;2]$.

(B) $\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$.

(C) $[0;2]\cup\left(-\infty;1-\sqrt{3}\right]\cup\left[1+\sqrt{3};+\infty\right)$.

(D) $\left(1-\sqrt{3}\right)\cup\left(1+\sqrt{3}\right)$.

Giải:

Chia hai vế cho 9^{1+2x-x^2}, ta có: $\left(\frac{5}{3}\right)^{1+2x-x^2}+1\ge\frac{34}{15}.\left(\frac{5}{3}\right)^{1+2x-x^2}$

Đặt $t=\left(\frac{5}{3}\right)^{1+2x-x^2}$, $t>0$, ta có bất phương trình: $t^2+1\ge\frac{34}{15}t\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0<t\le\frac{3}{5}\\ t\ge\frac{5}{3}\end{array}\right.$

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{l}0\le x\le 2\\ x\le 1-\sqrt{3}\\ x\ge 1+\sqrt{3}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left[\begin{array}{l}0\le x\le 2\\ x\le 1-\sqrt{3}\\ x\ge 1+\sqrt{3}\end{array}\right.$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 14 Tìm nghiệm của bất phương trình: $6.9^{\frac{1}{x}}-13.6^{\frac{1}{x}}+6.4^{\frac{1}{x}}\le 0$.

(A) $x\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$;

(B) $x\in(-1;1)$;

(C) $\varnothing$;

(D) $\mathbb{R}$.

Giải:

Điều kiện: $x\ne 0$.

Chia hai vế cho $4^{\frac{1}{x}}$, ta nhận được bất phương trình:

$$6.\left(\frac{9}{4}\right)^{\frac{1}{x}}-13.\left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{1}{x}}+6\le 0\Leftrightarrow 6.\left(\frac{3}{2}\right)^{2\left(\frac{1}{x}\right)}-13.\left(\frac{6}{4}\right)^{\frac{1}{x}}+6\le 0$$

Đặt $t=\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}$, $t>0$, ta nhận được bất phương trình:

$$6t^2-13t+6\le 0\Leftrightarrow\frac{2}{3}\le t\le\frac{3}{2}$$

Từ đó suy ra: $\left(\frac{3}{2}\right)^{-1}\le\left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{1}{x}}\le\frac{3}{2}\Leftrightarrow -1\le\frac{1}{x}\le 1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 1\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $\left[\begin{array}{l}x\le -1\\ x\ge 1\end{array}\right.$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Có thể chia cả hai vế của bất phương trình ban đầu cho $9^{\frac{1}{x}}$ hoặc $6^{\frac{1}{x}}$ thay vì chia cả hai vế cho $4^{\frac{1}{x}}$.

Bài tập 15 Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_9\left(3x^2-4x+2\right)}+1>\log_3\left(3x^2-4x+2\right)$ là:

(A) $\left(-1;\frac{1}{3}\right]$; **(B)** $\left[1;\frac{7}{3}\right)$;

(C) $\left(-1;\frac{1}{3}\right]\cup\left[1;\frac{7}{3}\right)$; **(D)** $\left(-\infty;\frac{1}{3}\right]\cup[1;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}3x^2-4x+2>0\\ \log_9\left(3x^2-4x+2\right)\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow 3x^2-4x+1\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\le\frac{1}{3}\\ x\ge 1\end{array}\right.$

Lúc này ta đặt $t=\log_9\left(3x^2-4x+2\right)$ ta nhận được bất phương trình:

$$\sqrt{t}+1>2t\Leftrightarrow\sqrt{t}>2t-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le t<\frac{1}{2}\\ \begin{cases}t\ge\frac{1}{2}\\ t>(2t-1)^2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}0\le t<\frac{1}{2}\\ \begin{cases}t\ge\frac{1}{2}\\ \frac{1}{4}<t<1\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow 0\le t<1$$

Từ đó suy ra: $0\le\log_9\left(3x^2-4x+2\right)<1\Leftrightarrow 1\le 3x^2-4x+2<9\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-1<x\le\frac{1}{3}\\ 1\le x<\frac{7}{3}\end{array}\right.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left[\begin{array}{l}-1<x\le\frac{1}{3}\\ 1\le x<\frac{7}{3}\end{array}\right.$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 16 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{2x}64+\log_{x^2}16\ge 3$ là:

(A) $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]$; **(B)** $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]\cup(1;4]$.

(C) $(1;4]$; **(D)** $\left(\frac{1}{2};4\right]$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}2x>0\\ 2x\ne 1\\ x^2>0\\ x^2\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ x\ne\frac{1}{2}\\ x\ne 1\end{cases}$.

Đưa về cùng cơ số 2 ta có bất phương trình:

$$\frac{\log_2 2^6}{\log_2 2x}+\frac{\log_2 2^4}{\log_2 x^2}\ge 3\Leftrightarrow\frac{6}{1+\log_2 x}+\frac{2}{\log_2 x}\ge 3$$

Đặt $t = \log_2 x$ ta được bất phương trình:

$$\frac{6}{1+t}+\frac{2}{t}\ge 3 \Leftrightarrow \frac{8t+2}{t(t+1)}\ge\frac{3t(t+1)}{t(t+1)} \Leftrightarrow \frac{-3t^2+5t+2}{t(t+1)}\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -1<t\le -\frac{1}{3} \\ 0<t\le 2 \end{array}\right.$$

+ Với $-1<t\le -\frac{1}{3} \Rightarrow -1<\log_2 x\le -\frac{1}{3} \Leftrightarrow \frac{1}{2}<x\le\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$

+ Với $0<t\le 2 \Rightarrow 0<\log_2 x\le 2 \Leftrightarrow 1<x\le 4$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left(\frac{1}{2};\frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right]\cup(1;4]$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Bài này ta đã sử dụng công thức biến đổi loga: $\log_c b = \frac{\log_a b}{\log_a c}$ để thuận tiện cho việc đặt ẩn phụ.

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_x 2.\log_{2x} 2 > \log_{4x} 2$ là:

(A) $\left(0;\frac{1}{4}\right)$;

(B) $\left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right)$;

(C) $\left(1;2^{\sqrt{2}}\right)$;

(D) $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;2^{\sqrt{2}}\right)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0 \\ x\ne 1 \\ x\ne\frac{1}{2} \\ x\ne\frac{1}{4} \end{cases}$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{1}{\log_2 x}.\frac{1}{1+\log_2 x}>\frac{1}{2+\log_2 x}$.

Đặt $t=\log_2 x$ ta được bất phương trình:

$$\frac{1}{t}.\frac{1}{1+t}>\frac{1}{2+t} \Leftrightarrow \frac{2-t^2}{t(1+t)(2+t)}>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t<-2 \\ -\sqrt{2}<t<-1 \\ 0<t<\sqrt{2} \end{array}\right.$$

Từ đó suy ra: $\left[\begin{array}{l} \log_2 x<-2 \\ -\sqrt{2}<\log_2 x<-1 \\ 0<\log_2 x<\sqrt{2} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0<x<\frac{1}{4} \\ \frac{1}{2^{\sqrt{2}}}<x<\frac{1}{2} \\ 1<x<2^{\sqrt{2}} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left(0;\frac{1}{4}\right)\cup\left(\frac{1}{2^{\sqrt{2}}};\frac{1}{2}\right)\cup\left(1;2^{\sqrt{2}}\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Bài này ta đã sử dụng công thức biến đổi loga: $\log_a b=\frac{1}{\log_b a}$ để thuận tiện cho việc đặt ẩn phụ.

Bài tập 18 Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{\log_9\left(3x^2+4x+2\right)+1}>\log_3\left(3x^2+4x+2\right)$ là:

(A) $\left(-\frac{7}{3};-1\right]$; **(B)** $\left[-\frac{1}{3};1\right)\cup\left(-\frac{7}{3};-1\right]$;

(C) $\left[-\frac{1}{3};1\right)$; **(D)** $(0;2)$.

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}\log_3\left(3x^2+4x+2\right)+1}>\log_3\left(3x^2+4x+2\right)$ (1)

Đặt $t=\log_3\left(3x^2+4x+2\right)>0$

Khi đó, bất phương trình (1) trở thành: $\sqrt{\frac{1}{2}t+1}>t\Leftrightarrow\sqrt{\frac{1}{2}t}>t-1\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t-1<0\\ \begin{cases}t-1\ge 0\\ \frac{1}{2}t>(t-1)^2\end{cases}\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<1\\ \begin{cases}t\ge 1\\ t^2-\frac{5}{2}t+1<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<1\\ \begin{cases}t\ge 1\\ \frac{1}{2}<t<2\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t<1\\ 1\le t<2\end{array}\right.\Leftrightarrow t<2$$

So sánh với điều kiện ta có: $0<t<2$.

Với $0<t<2$ thì $0\le\log_3\left(3x^2+4x+2\right)<2\Leftrightarrow 1\le 3x^2+4x+2<9$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}3x^2+4x+1\ge 0\\ 3x^2+4x-7<0\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}-\frac{1}{3}\le x<1\\ -\frac{7}{3}<x\le -1\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $\left[-\frac{1}{3};1\right)\cup\left(-\frac{7}{3};-1\right]$. $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 19 Tập nghiệm của bất phương trình $(x+1)\log_{\frac{1}{2}}^2 x+(2x+5)\log_{\frac{1}{2}} x+6\ge 0$ là:

(A) $(0;2]\cup[4;+\infty)$; **(B)** $(0;2]$; **(C)** $[4;+\infty)$; **(D)** $[2;4]$.

Giải:

Điều kiện: $x>0$.

Đặt $t=\log_{\frac{1}{2}} x$. Khi đó, bất phương trình trở thành: $(x+1)t^2+(2x+5)t+6\ge 0$

$\Leftrightarrow(t+2)\left[(x+1)t+3\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow\left(\log_{\frac{1}{2}} x+2\right)\left[(x+1)\log_{\frac{1}{2}} x-3\right]\ge 0$

$\Leftrightarrow(\log_2 x-2)\left[(x+1)\log_2 x-3\right]\ge 0$ (1)

+ Xét $f(x)=(x+1)\log_2 x-3$.

Với $x > 0$ thì f(x) là hàm số đồng biến và f(2) = 0 $\Rightarrow f(x)\ge 0 \Leftrightarrow x\ge 2 \Leftrightarrow x-2\ge 0$. Do đó f(x) luôn cùng dấu với x – 2.

+ Xét $g(x)=\log_2 x-2$. Ta có: $g(x)\ge 0\Leftrightarrow x\ge 4\Leftrightarrow x-4\ge 0$. Do đó g(x) luôn cùng dấu với x – 4.

Từ đó suy ra f(x)g(x) luôn cùng dấu với (x - 2)(x - 4) và $(1)\Leftrightarrow (x-2)(x-4)\ge 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge 4\\ x\le 2\end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, ta có: $\left[\begin{array}{l} 0<x\le 2\\ x\ge 4\end{array}\right.$. $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: $f(t)\ge 0\Leftrightarrow t\ge a\Leftrightarrow t-a\ge 0\Rightarrow f(t)\ge 0\Leftrightarrow t-a\ge 0\Rightarrow$ f(t) luôn cùng dấu với t – a.

Bài tập 20 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 x+\log_{2x} 8\le 3$ là:

(A) $[1;2)$; **(B)** $[4;+\infty)$; **(C)** $[1;2)\cup[4;+\infty)$; **(D)** $[1;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x>0\\ 0<2x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x>0\\ 0<x\ne \dfrac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow 0<x\ne\dfrac{1}{2}$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{\log_2 8}{\log_2 2x}\le 3$

$\Leftrightarrow \log_2 x+\dfrac{3}{1+\log_2 x}\le 3$ (1)

Đặt $t=\log_2 x$. Khi đó, bất phương trình (1) trở thành: $t+\dfrac{3}{1+t}\le 3$

$$\Leftrightarrow \frac{t^2-2t}{1+t}\le 0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} t^2-2t\le 0\\ 1-t>0\end{cases}\\ \begin{cases} t^2-2t\ge 0\\ 1-t<0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases} 0\le t\le 2\\ t<1\end{cases}\\ \begin{cases}\left[\begin{array}{l} t\ge 2\\ t\le 0\end{array}\right.\\ t>0\end{cases}\end{array}\right.\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 0\le t<1\\ t\ge 2\end{array}\right..$$

+ Với $0\le t<1$ thì $0\le \log_2 x<1\Leftrightarrow 1\le x<2$ (Thỏa mãn)

+ Với $t\ge 2$ thì $\log_2 x\ge 2\Leftrightarrow x\ge 4$ (Thỏa mãn)

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=[1;2)\cup[4;+\infty)$. $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 21 Tập nghiệm của bất phương trình $(x+1)\log_{\frac{1}{2}}^2 x+(2x+5)\log_{\frac{1}{2}} x+6\ge 0$ là:

(A) $(0;2]\cup[4;+\infty)$; **(B)** $(0;2]$; **(C)** $[4;+\infty)$; **(D)** $(0;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $x > 0$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow (x+1)\log_2^2 x-(2x+5)\log_2 x+6\ge 0$ (1)

Đặt $t = \log_2 x$, bất phương trình (1) trở thành: $(x+1)t^2 - (2x+5)t + 6 \geq 0$ (2)

Ta có: $\Delta = (2x+5)^2 - 24(x+1) = 4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2$

$\Rightarrow t_1 = 2; t_2 = \dfrac{3}{x+1}$.

Xét $t_1 - t_2 = 2 - \dfrac{3}{x+1} = \dfrac{2x-1}{x+1}$.

Nếu $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$ thì $t_1 - t_2 < 0 \Rightarrow t_1 < t_2$, khi đó tập nghiệm của (2) là:

$$\left[\begin{array}{l} t \leq 2 \\ t \geq \dfrac{3}{x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \log_2 x \leq 2 & (3) \\ \log_2 x \geq \dfrac{3}{x+1} & (4) \end{array}\right..$$

+ Khi $0 < x \leq \dfrac{1}{2}$ thì (3) thỏa mãn, (4) không thỏa mãn nên tập nghiệm của (2) là:

$\left(0; \dfrac{1}{2}\right]$ (5)

+ Khi $x > \dfrac{1}{2}$ thì $t_1 - t_2 > 0 \Leftrightarrow t_2 < t_1$, khi đó tập nghiệm của (2) là: $\left[\begin{array}{l} t \geq t_1 \\ t \leq t_2 \end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \log_2 x \geq 2 \\ \log_2 x \leq \dfrac{3}{x+1} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ \log_2 x \leq \dfrac{3}{x+1} \end{array}\right. \quad (6)$$

Xét bất phương trình $\log_2 x \leq \dfrac{3}{x+1}$:

Đặt $f(x) = \log_2 x$, $g(x) = \dfrac{3}{x+1}$, $x \in \left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Ta có: $f'(x) = \dfrac{1}{x \ln 2} > 0 \ \forall x > \dfrac{1}{2}$; $g'(x) = -\dfrac{3}{(x+1)^2} < 0 \ \forall x > \dfrac{1}{2} \Rightarrow$ f(x) là hàm số đồng biến và g(x) là hàm số nghịch biến trên $\left(\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Mà $f(2) = g(2) = 1$ nên $x \leq 2$

$$\Rightarrow (6) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \geq 4 \\ \dfrac{1}{2} < x \leq 2 \end{array}\right. \quad (7)$$

Từ (5) và (7) $\Rightarrow$ nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \in (0; 2] \cup [4; +\infty)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

4. Phương pháp hàm số

4.1. Phương pháp

Đối với phương pháp này ta có 4 hướng áp dụng:

*+ **Hướng 1:*** Thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Chuyển bất phương trình về dạng: $f(x) \le k$.

Bước 2: Xét hàm số y = f(x) và chứng minh cho hàm số đồng biến (nghịch biến) trên miền xác định.

Bước 3: Lập luận: Hàm số y = f(x) là đồng biến (nghịch biến) mà y = k là hàm hằng nên nếu phương trình f(x) = k có nghiệm $x = x_0$ thì $x \le x_0 \left(x \ge x_0\right)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Bước 4: Kết luận: Vậy $x \le x_0 \ \left(x \ge x_0\right)$ là nghiệm của bất phương trình đã cho.

Ví dụ Xét bất phương trình: $e^{\frac{x}{2}} + x \le 1$. Ta có: Hàm số $y = f(x) = e^{\frac{x}{2}} + x$ là hàm số đồng biến, vì $y' = f'(x) = \frac{1}{2}e^{\frac{x}{2}} + 1 > 0\ \forall x$. Mà $f(0) = 1$ nên $f(x) \le f(1) \Leftrightarrow x \ge 1$.

*+ **Hướng 2:*** Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Chuyển bất phương trình về dạng: $f(x) \le g(x)$.

Bước 2: Xét các hàm số y = f(x) và y = g(x). Chứng minh cho hàm số y = f(x) là đồng biến (nghịch biến), còn hàm số y = g(x) là nghịch biến (đồng biến) hoặc là hàm hằng. Xác định x_0 sao cho $f(x_0) = g(x_0)$.

Bước 3: Kết luận: Nghiệm của bất phương trình là: $x \le x_0 \ \left(x \ge x_0\right)$.

Ví dụ Xét bất phương trình: $e^{2x} \le -x^5 + 1$. Ta có: Hàm số $y = f(x) = e^{2x}$ là đồng biến, vì $f'(x) = 2e^{2x} > 0\ \forall x$, hàm số $y = g(x) = -x^5 + 1$ là hàm số nghịch biến, vì $g'(x) = -5x^4 \le 0\ \forall x$. Mà f(0) = g(0) $\Rightarrow$ nghiệm của bất phương trình là: $x \le 0$.

*+ **Hướng 3:*** Thực hiện theo các bước:

Bước 1: Đưa bất phương trình về dạng: $f(u) \le f(v)$.

Bước 2: Xét hàm số y = f(x). Chứng minh cho hàm số đơn điệu (đồng biến hoặc nghịch biến).

Bước 3: Khi đó, $f(u) \le f(v) \Leftrightarrow u \le v\ (u \ge v)$.

Bước 4: Giải tìm x và kết luận nghiệm.

Ví dụ Xét bất phương trình: $\log_3 x^2 - \log_3 2x \le 2x - x^2$.

$\Leftrightarrow \log_3 x^2 + x^2 \le \log_3 2x + 2x.$

Xét hàm đặc trưng: $f(t)=\log_3 t+t,\ t>0$. Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 3}+1>0\ \forall t>0$ nên hàm số $y = f(t)$ đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x^2)\le f(2x)\Leftrightarrow x^2\le 2x\Leftrightarrow x(x-2)\le 0\Leftrightarrow 0\le x\le 2.$

*+ **Hướng 4:*** Sử dụng bảng biến thiên, đồ thị của hàm số.

Nghiệm của bất phương trình: $f(x) < g(x)$ là các giá trị của x thỏa mãn phần đồ thị của hàm số $y = f(x)$ nằm phía dưới phần đồ thị của hàm số $y = g(x)$.

4.2 Bài tập

A. Khởi động

Bài tập 1. Tập nghiệm của bất phương trình $2^x+3^x+4^x\ge 29$ là:

(A) $(2;+\infty)$; **(B)** $(-\infty;2)$; **(C)** $[2;+\infty)$; **(D)** $(-\infty;2]$.

Giải:

Xét hàm số: $f(x)=2^x+3^x+4^x$.

Ta có: $f'(x)=2^x\ln 2+3^x\ln 3+4^x\ln 4>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f(x) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(2) = 29 \Rightarrow f(x)\ge f(2)\Leftrightarrow x\ge 2$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $[2;+\infty)$. **Chọn (C).**

Bài tập 2. Tập nghiệm của bất phương trình $3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+\left(\dfrac{1}{6}\right)^x>1$ là:

(A) $(-\infty;2)$; **(B)** $(2;+\infty)$; **(C)** $(-\infty;2]$; **(D)** $[2;+\infty)$.

Giải:

Đặt $f(x)=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x+\left(\dfrac{1}{6}\right)^x$.

Ta có: $f'(x)=3\left(\dfrac{1}{2}\right)^x\ln\dfrac{1}{2}+2\left(\dfrac{1}{3}\right)^x\ln\dfrac{1}{3}+\left(\dfrac{1}{6}\right)^x\ln\dfrac{1}{6}<0\ \forall x\Rightarrow$ f(x) là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà $f(2) = 1$ nên $f(x)>f(2)\Rightarrow x<2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x < 2$. **Chọn (A).**

Bài tập 3. Nghiệm của bất phương trình $\log_2(2x+4)+\log_3(x+1)>2$ là:

(A) $-1<x<0$; **(B)** $-1<x\le 0$; **(C)** $x>0$; **(D)** $x>-1$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}2x+4>0\\ x+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-2\\ x>-1\end{cases}\Leftrightarrow x>-1.$

Đặt $f(x)=\log_2(2x+4)+\log_3(x+1),\ x>-1$.

Ta có:

$f'(x)=\dfrac{2}{(2x+4)\ln 2}+\dfrac{1}{(x+1)\ln 3}>0\ \forall x>-1\Rightarrow$ f(x) là hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$

Mà f(0) = 2 $\Rightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x>0.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: x > 0.

Chọn (C).

Bài tập 4 Nghiệm của bất phương trình $\log_2(3^x+1)+\log_3(5^x+2)\le 2$ là:

(A) $x=0$; **(B)** $x\ge 0$; **(C)** $x\le 0$; **(D)** $x\in\mathbb{R}$.

Giải:

Xét hàm số: $f(x)=\log_2(3^x+1)+\log_3(5^x+2)$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{3^x}{(3^x+1)\ln 2}+\dfrac{5^x}{(5^x+2)\ln 3}>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f(x) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà f(0) = 2 $\Rightarrow f(x)\le f(0)\Leftrightarrow x\le 0.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\le 0$. **Chọn (C).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 5 Nghiệm của bất phương trình $2^{\sqrt{x+4}}+3^{\sqrt{3x+4}}>13$ là:

(A) $x>0$; **(B)** $-\dfrac{4}{3}<x<0$; **(C)** $x>-\dfrac{4}{3}$; **(D)** $x<0$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x+4>0\\3x+4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-4\\x>-\dfrac{4}{3}\end{cases}\Leftrightarrow x>-\dfrac{4}{3}.$

Đặt $f(x)=2^{\sqrt{x+4}}+3^{\sqrt{3x+4}},\ x>-\dfrac{4}{3}$.

Ta có: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x+4}}.2^{\sqrt{x+4}}\ln 2+\dfrac{3}{3x+4}.3^{\sqrt{3x+4}}\ln 3>0\forall x>-\dfrac{4}{3}\Rightarrow$ f(x) là hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{4}{3};+\infty\right)$.

Mà f(0) = 13 $\Rightarrow f(x)>f(0)\Leftrightarrow x>0.$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: x > 0. Do đó **Chọn (A).**

Bài tập 6 Tập nghiệm của bất phương trình $3^x+4^x\le 5^x$ là:

(A) $\{2\}$; **(B)** $(-\infty;2]$; **(C)** $[2;+\infty)$; **(D)** $(2;+\infty)$.

Giải:

Chia cả hai vế của bất phương trình cho 5^x, ta được: $\left(\dfrac{3}{5}\right)^x+\left(\dfrac{4}{5}\right)^x\le 1\quad (1)$

Xét hàm số: $f(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x+\left(\frac{4}{5}\right)^x$.

Ta có: $f'(x)=\left(\frac{3}{5}\right)^x\ln\frac{3}{5}+\left(\frac{4}{5}\right)^x\ln\frac{4}{5}<0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f(x) là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Mà f(2) = 1 $\Rightarrow f(x)\le f(2)\Leftrightarrow x\ge 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\ge 2$. **Chọn (C).**

Lưu ý: Đối với bài này việc đặt $f(x)=3^x+4^x, g(x)=5^x$ và đi xét tính đơn điệu của hai hàm số này chưa giải quyết được vấn đề của bài toán, vì f(x) và g(x) đều là các hàm số đồng biến nên ta phải qua một bước nữa là chia cả hai vế của bất phương trình ban đầu cho 5^x để vế trái trở thành hàm nghịch biến, còn vế phải là hàm hằng. Bài toán trở nên quen thuộc hơn.

Bài tập 7 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(\sqrt{x^2-5x+5}+1\right)+\log_3\left(x^2-5x+7\right)\ge 2$ là:

(A) $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$; **(B)** $[4;+\infty)$; **(C)** $(-\infty;1]$; **(D)** $[1;+\infty)$.

Giải:

Đặt $t=\sqrt{x^2-5x+4}\ge 0$, bất phương trình đã cho trở thành:

$\log_2(t+1)+\log_3(t^2+2)\ge 2$.

Xét $f(t)=\log_2(t+1)+\log_3(t^2+2)$ trên $[0;+\infty)$.

Ta có: $f'(t)=\frac{1}{(t+1)\ln 2}+\frac{2t}{(t^2+2)\ln 3}>0\ \forall t\in[0;+\infty)\Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $[0;+\infty)$.

Mà f(1) = 2 nên $f(t)\ge f(1)\Leftrightarrow t\ge 1$.

Ta có: $t\ge 1\Leftrightarrow\sqrt{x^2-5x+5}\ge 1\Leftrightarrow x^2-5x+4\ge 0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x\ge 4\\x\le 1\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\in(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$. **Chọn (A).**

C. Tăng tốc

Bài tập 8 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_{x^2-1}3\le\log_x 2$ là:

(A) $(2;+\infty)$; **(B)** $[2;+\infty)$; **(C)** $(-\infty;2)$; **(D)** $(-\infty;2]$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}0<x^2-1\ne 1\\0<x\ne 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\x\ne\sqrt{2}\end{cases}$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow\frac{1}{\log_3(x^2-1)}\le\frac{1}{\log_2 x}$ (1)

+ Nếu $1 < x < \sqrt{2}$ thì $x^2 - 1 < 1 \Rightarrow \begin{cases} \log_3(x^2-1) < 0 \\ \log_2 x > 0 \end{cases} \Rightarrow$ (1) nghiệm đúng với $\forall x \in (1; \sqrt{2})$.

+ Nếu $x > \sqrt{2}$ thì $(1) \Leftrightarrow \log_2 x \le \log_3(x^2-1)$ (2)

Đặt $t = \log_2 x \Rightarrow x = 2^t,\ t > \frac{1}{2}$.

Bất phương trình (2) trở thành: $t \le \log_3(4^t - 1) \Leftrightarrow 3^t \le 4^t - 1 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t \le 1$ (3)

Xét hàm số $f(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t + \left(\frac{1}{4}\right)^t,\ t > \frac{1}{2}$

Ta có:

$f'(t) = \left(\frac{3}{4}\right)^t \ln\frac{3}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^t \ln\frac{1}{4} < 0\ \forall t > \frac{1}{2} \Rightarrow$ f(t) là hàm số nghịch biến trên $\left(\frac{1}{2}; +\infty\right)$

Mà $(3) \Leftrightarrow f(t) \le f(1) \Rightarrow t \ge 1 \Leftrightarrow \log_2 x \ge 1 \Leftrightarrow x \ge 2$

So sánh với điều kiện, suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $[2; +\infty)$.

Chọn (B).

Bài tập Nghiệm của bất phương trình $\frac{3^{2-x} + 3 - 2x}{4^x - 2} \ge 0$ là:

(A) $x < \frac{1}{2}$; **(B)** $x > 2$; **(C)** $\frac{1}{2} < x \le 2$; **(D)** $x \ge 2$.

Giải:

Điều kiện: $4^x - 2 \ne 0 \Leftrightarrow 2^{2x} \ne 2 \Leftrightarrow x \ne \frac{1}{2}$.

Xét hàm số: $f(x) = 3^{2-x} + 3 - 2x$ trên $\mathbb{R}$.

Ta có: $f'(x) = -3^{2-x}\ln 3 - 2 < 0\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f(x) là hàm số nghịch biến trên $\mathbb{R}$.

Xét hàm số: $g(x) = 4^x - 2$ trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Ta có: $g'(x) = 4^x \ln 4 > 0\ \forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\} \Rightarrow$ g(x) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{1}{2}\right\}$.

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} f(x) \ge 0 = f(2) \\ g(x) > 0 = g\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \\ \begin{cases} f(x) \le 0 = f(2) \\ g(x) < 0 = g\left(\frac{1}{2}\right) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \le 2 \\ x > \frac{1}{2} \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge 2 \\ x < \frac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \frac{1}{2} < x \le 2.$$

So sánh với điều kiện, ta có nghiệm của bất phương trình là: $\frac{1}{2} < x \le 2$.
Chọn (C).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2\left(x^2-1\right) > 12 - x^2$ là:

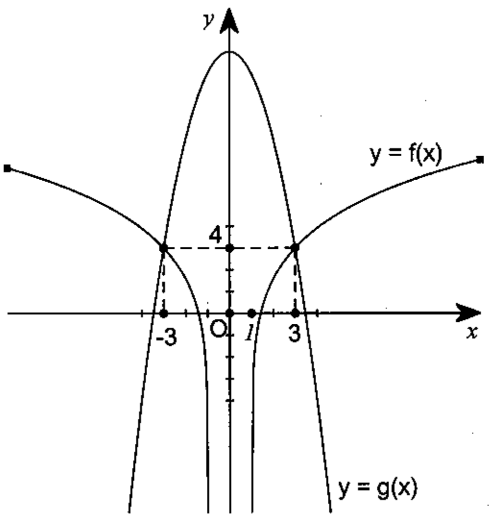
(A) $(-3;3)$; **(B)** $[-3;3]$;

(C) $(-\infty;-3]\cup[3;+\infty;)$ **(D)** $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $x^2-1>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>1 \\ x<-1 \end{array}\right.$.

Xét 2 hàm số: $f(x)=\log_2\left(x^2-1\right)$ và $g(x)=12-x^2$ trên $(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$
Vẽ đồ thị hai hàm số f(x) và g(x).



Nhìn vào đồ thị hàm số ta thấy g(x) > f(x) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-3 \\ x>3 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$. **Chọn (D).**

Lưu ý: Nghiệm của bất phương trình f(x) > g(x) là các giá trị của x thỏa mãn phần đồ thị của hàm số y = f(x) nằm trên phần đồ thị của hàm số y = g(x). Việc sử dụng đồ thị của hàm số để tìm nghiệm của bất phương trình là một phương pháp khá hay. Dưới đây là một ví dụ về sử dụng bảng biến thiên để đoán nhận số nghiệm của một phương trình:

Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{\log\dfrac{5+x}{5-x}}{2^x-3x+1}<0$ là:

(A) $(-5;5)\setminus\{1;3\}$; **(B)** $(-5;5)$; **(C)** $[-5;5]\setminus\{1;3\}$; **(D)** $(-5;1)\cup(3;5)$.

Giải:

Điều kiện: $2^x-3x+1\ne 0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \log\dfrac{5+x}{5-x} < 0 \\ 2^x - 3x + 1 > 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \log\dfrac{5+x}{5-x} > 0 \\ 2^x - 3x + 1 < 0 \end{cases} \end{array}\right.$ (1)

Xét hàm số: $f(x) = 2^x - 3x + 1$.

Ta có: $f'(x) = 2^x \ln 2 - 3 = 0 \Leftrightarrow 2^x = \dfrac{3}{\ln 2} \Leftrightarrow x = \log_2\left(\dfrac{3}{\ln 2}\right) = x_0$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		x_0		$+\infty$
f'(x)		-	0	+	
f(x)	$+\infty$	$\searrow$	$f(x_0)$	$\nearrow$	$+\infty$

$\Rightarrow f(x) = 0$ có nhiều nhất 2 nghiệm.

Ta có: f(1) = 0 và f(3) = 0 nên x = 1 và x = 3 là 2 nghiệm của f(x) = 0.

$f(x) > 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 3 \end{array}\right.$; $f(x) < 0 \Leftrightarrow 1 < x < 3$.

Ta có: $\log\dfrac{5+x}{5-x} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{5+x}{5-x} > 1 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{5-x} > 0 \Leftrightarrow 0 < x < 5$

$$\log\frac{5+x}{5-x} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{5+x}{5-x} > 0 \\ \dfrac{5+x}{5-x} < 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -5 < x < 5 \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -5 < x < 1 \\ 3 < x < 5 \end{array}\right..$$

Khi đó, $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} \left[\begin{array}{l} -5 < x < 1 \\ 3 < x < 5 \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x < 1 \\ x > 3 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} 0 < x < 5 \\ 1 < x < 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow -5 < x < 5.$

So sánh với điều kiện ta có, nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \in (-5;5) \setminus \{1;3\}$.

Chọn (A).

Lưu ý: Nhìn vào bảng biến thiên ta sẽ thấy ngay đường thẳng y = 0 cắt đồ thị hàm số y = f(x) nhiều nhất tại 2 điểm. Bảng biến thiên là một công cụ khá hữu ích trong việc đoán nhận số nghiệm của một phương trình.

D. Về đích

Bài tập 12 Tập nghiệm của bất phương trình $x\left(3\log_2 x-2\right)>9\log_2 x-2$ là:

(A) $(0;1)$; **(B)** $(0;1)\cup(4;+\infty)$; **(C)** $(4;+\infty)$; **(D)** $(0;+\infty)$.

Giải:

Điều kiện: $x>0$.

Bất phương trình $\Leftrightarrow 3(x-3)\log_2 x>2(x-1)$ (1)

Ta thấy: $x=3$ không là nghiệm của bất phương trình (1)

+ Nếu $x>3$ thì $(1)\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x>\frac{x-1}{x-3}$ (2)

Xét hàm số: $f(x)=\frac{3}{2}\log_2 x$ và $g(x)=\frac{x-1}{x-3}$.

Ta có: $f'(x)=\frac{3}{2x\ln 2}>0\ \forall x>0\Rightarrow$ f(x) là hàm số đồng biến trên $(3;+\infty)$

$g'(x)=\frac{-2}{(x-3)^2}<0\ \forall x\neq 3\Rightarrow$ g(x) là hàm số nghịch biến trên $(3;+\infty)$

Với $x>4$, ta có: $\begin{cases} f(x)>f(4)=3 \\ g(x)<g(4)=3 \end{cases}\Rightarrow$ Bất phương trình (2) có nghiệm $x>4$.

Với $x<4$, ta có: $\begin{cases} f(x)<f(4)=3 \\ g(x)>g(4)=3 \end{cases}\Rightarrow$ Bất phương trình (2) vô nghiệm.

+ Nếu $0<x<3$ thì $(1)\Leftrightarrow \frac{3}{2}\log_2 x<\frac{x-1}{x-3}$ (3)

Xét hàm số: $f(x)=\frac{3}{2}\log_2 x$ và $g(x)=\frac{x-1}{x-3}$.

Ta có: $f'(x)=\frac{3}{2x\ln 2}>0\ \forall x>0\Rightarrow$ f(x) là hàm số đồng biến trên $(0;3)$

$g'(x)=\frac{-2}{(x-3)^2}<0\ \forall x\neq 3\Rightarrow$ g(x) là hàm số nghịch biến trên $(0;3)$

Với $x>1$, ta có: $\begin{cases} f(x)>f(1)=0 \\ g(x)<g(1)=0 \end{cases}\Rightarrow$ Bất phương trình (3) vô nghiệm.

Với $x<1$, ta có: $\begin{cases} f(x)<f(1)=0 \\ g(x)>g(1)=0 \end{cases}\Rightarrow$ Bất phương trình (1) có nghiệm: $0<x<1$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x\in(0;1)\cup(4;+\infty)$.

Chọn (B).

Tìm a để bất phương trình sau có nghiệm: $\log_{\frac{1}{2}}\sqrt{x^2+1} > \log_{\frac{1}{2}}(ax+a)$.

(A) $-1 < a < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **(B)** $a < 1$;

(C) $-1 < a < 1$; **(D)** $a > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $a < -1$.

Giải:

Điều kiện: $ax + a > 0$.

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} < ax+a \Leftrightarrow \sqrt{x^2+1} < a(x+1)$

Xét các trường hợp sau:

Trường hợp 1: $a > 0$, để bất phương trình có nghiệm thì $x + 1 > 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} < a$

+ Trường hợp 2: $a < 0$, để bất phương trình có nghiệm thì $x + 1 < 0 \Rightarrow \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1} > a$

Xét hàm số: $y = \dfrac{\sqrt{x^2+1}}{x+1}$ với $x \neq -1$.

Ta có: $y' = \dfrac{x-1}{(x+1)^2\sqrt{x^2+1}} = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

Bảng biến thiên:

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	||	$-$	0	$+$	
$f(x)$	-1	$\searrow$	$-\infty$ || $+\infty$	$\searrow$	$\dfrac{\sqrt{2}}{2}$	$\nearrow$	1

Từ bảng biến thiên ta có: $a > \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ hoặc $a < -1$. **Chọn (D).**

Lưu ý:

- Để bất phương trình $f(x) < a$ có nghiệm thì $a > \text{Min}f(x)$.
- Để bất phương trình $f(x) > a$ có nghiệm thì $a > \text{Max}f(x)$.

Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}\sqrt{2x^2-3x+1}} > \dfrac{1}{\log_{\frac{1}{3}}(x+1)}$ là:

(A) $\left(0;\dfrac{1}{2}\right) \cup \left(1;\dfrac{3}{2}\right) \cup (5;+\infty)$; **(B)** $(5;+\infty)$;

(C) $\left(0;\dfrac{1}{2}\right)$; **(D)** $\left(1;\dfrac{3}{2}\right)$;

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0 < 2x^2 - 3x + 1 \neq 1 \\ 0 < x + 1 \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ -1 < x < \dfrac{1}{2} \end{array}\right. \\ x \neq 0; x \neq \dfrac{3}{2} \end{cases}$ (*)

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\log_3(x+1)} - \dfrac{1}{\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log_3\sqrt{2x^2-3x+1} - \log_3(x+1)}{\log_3(x+1).\log_3\sqrt{2x^2-3x+1}} > 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{\log_3(2x^2-3x+1) - \log_3(x+1)^2}{\log_3(x+1).\log_3(2x^2-3x+1)} > 0$ (1)

Hàm số $f(t) = \log_3(t+1)$ là hàm số đồng biến và f(0) = 0 $\Rightarrow f(t) = f(t) - f(0)$ luôn cùng dấu hoặc cùng triệt tiêu với t – 0 = t. Tức là:

$\log_3(x+1)$ cùng dấu hoặc cùng triệt tiêu với x;

$\log_3(2x^2-3x+1)$ cùng dấu hoặc cùng triệt tiêu với $2x^2 - 3x$

Và $\log_3(2x^2-3x+1) - \log_3(x+1)^2$ cùng dấu hoặc cùng triệt tiêu với:

$2x^2 - 3x + 1 - (x+1)^2 = x^2 - 5x$

Do đó: $(1) \Leftrightarrow \dfrac{x^2-5x}{x(2x^2-3x)} > 0 \Leftrightarrow (x^2-5x)(2x-3) > 0$ (do (*))

Kết hợp với (*) ta có: $\left[\begin{array}{l} x > 5 \\ 0 < x < \dfrac{1}{2}. \\ 1 < x < \dfrac{3}{2} \end{array}\right.$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \left(0; \dfrac{1}{2}\right) \cup \left(1; \dfrac{3}{2}\right) \cup (5; +\infty)$.

Chọn (A).

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_2 \dfrac{2x+1}{x^2-2x+1} \leq 2x^2 - 6x + 2$ là:

(A) $\left(-\dfrac{1}{2}; \dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$;

(B) $\left(-\infty; \dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{3+\sqrt{7}}{2}; +\infty\right)$;

(C) $\left(\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}; \dfrac{3+\sqrt{7}}{2}\right)$;

(D) $\left(-\dfrac{1}{2}; +\infty\right)$.

Giải:

Điều kiện: $\dfrac{2x+1}{x^2-2x+1}>0 \Leftrightarrow \dfrac{2x+1}{(x-1)^2}>0 \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ x\neq 1 \end{cases}.$

Khi đó, bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}-1\le 2x^2-6x+1$

$\Leftrightarrow \log_2\dfrac{2x+1}{(x-1)^2}\le 2(x-1)^2-(2x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2\left[2(x-1)^2\right]+2(x-1)^2\ge \log_2(2x+1)+(2x+1)$ (1)

Xét hàm số: $f(t)=\log_2 t+t,\ t>0$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{t\ln 2}+1>0\ \forall t>0 \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow (1)\Leftrightarrow 2(x-1)^2\ge 2x+1 \Leftrightarrow 2x^2-6x+1\ge 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\ge \dfrac{3+\sqrt{7}}{2} \\ x\le \dfrac{3-\sqrt{7}}{2} \end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, suy ra tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$S=\left(-\dfrac{1}{2};\dfrac{3-\sqrt{7}}{2}\right]\cup\left[\dfrac{3+\sqrt{7}}{2};+\infty\right)$

Chọn (A).

Bài tập 16 Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x+1}+(5x^2+11).2^{1-x}-x^2<24-x\left[1-(x^2-9).2^{-x}\right]$ là:

(A) $(0;1)$; **(B)** $(2;3)$; **(C)** $(0;1)\cup(2;3)$; **(D)** $(0;3)$.

Giải:

Đặt $2^x=t>0$. Khi đó bất phương trình đã cho trở thành:

$2t+\dfrac{10x^2+11}{t}-x^2<24-x+\dfrac{x^3-9x}{t}$

$\Leftrightarrow 2t^2-(x^2-x+24)t+22+9x+10x^2-x^3<0$ (1)

$\Delta=(x^2-x+24)^2-8(22+9x+10x^2-x^3)=(x^2+3x)^2-40(x^2+3x)+400=(x^2+3x-20)^2$

Ta có: $\left[\begin{array}{l} t=\dfrac{x^2-x+24+x^2+3x-20}{4}=\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}x+1 \\ t=\dfrac{x^2-x+24-x^2-3x+20}{4}=-x+11 \end{array}\right.$

Khi đó, $(1)\Leftrightarrow 2\left(t-\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}x-1\right)(t+x-11)<0 \Leftrightarrow (2t-x^2-x-2)(t+x-11)<0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2t-x^2-x-2>0\\t+x-11<0\end{cases}\\\begin{cases}2t-x^2-x-2<0\\t+x-11>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}2.2^x-x^2-x-2>0\\2^x+x-11<0\end{cases}\\\begin{cases}2.2^x-x^2-x-2<0\\2^x+x-11>0\end{cases}\end{array}\right. \quad (1)$$

Xét hàm số: $f(x)=2^x+x-11$.

Ta có: $f'(x)=2^x\ln 2+1>0\ \forall x \Rightarrow f(x)$ là hàm số đồng biến

Mà $f(3)=0$ nên $f(x)>0 \Rightarrow x>3$ và $f(x)<0 \Rightarrow x<3$.

Xét hàm số: $g(x)=2.2^x-x^2-x-2$.

Ta có: $g'(x)=2.2^x\ln 2-2x$; $g''(x)=2.2^x.(\ln 2)^2-2$.

$$g''(x)=0 \Leftrightarrow 2^x=\frac{2}{2\ln^2 2} \Leftrightarrow x=\log_1\left(\frac{2}{2\ln^2 2}\right)=x_0$$

$g''(x)>0 \Leftrightarrow x>x_0 \Rightarrow$ Hàm số $g'(x)$ đồng biến trên $(x_0;+\infty)$

$g''(x)<0 \Leftrightarrow x<x_0 \Rightarrow$ Hàm số $g'(x)$ nghịch biến trên $(-\infty;x_0)$

$\Rightarrow g'(x)=0$ có tối đa 2 nghiệm $\Rightarrow g(x)=0$ có tối đa 3 nghiệm. Mặt khác $g(0)=g(1)=g(2)=0 \Rightarrow g(x)=0$ có đúng 3 nghiệm phân biệt là $x=0$; $x=1$ và $x=2$.

Lại có: $g(x)>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x>2\\0<x<1\end{array}\right.$ và $g(x)<0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x<0\\1<x<2\end{array}\right.$.

Suy ra hệ (1) trở thành:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}g(x)>0\\f(x)<0\end{cases}\\\begin{cases}g(x)<0\\f(x)>0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}\left[\begin{array}{l}0<x<1\\x>2\end{array}\right.\\x<3\end{cases}\\\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x<0\\1<x<2\end{array}\right.\\x>3\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1\\2<x<3\end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=(0;1)\cup(2;3)$. **Chọn (C).**

5. Phương pháp đánh giá – bất đẳng thức

5.1. Phương pháp

◆ **Dạng 1:** Đánh giá dựa trên tính chất hàm số mũ hay hàm số logarit

Giải bất phương trình: $3^{x^2}+2x^4\ge 1$.

Giải:

Ta có: $x^2\ge 0\Rightarrow \begin{cases}3^{x^2}\ge 3^0=1\\ x^4\ge 0\end{cases}\Rightarrow 3^{x^2}+2x^4\ge 1+2.0=1=VP$

$\Rightarrow VT\ge VP\ \ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ Tập nghiệm của bất phương trình là: $S=\mathbb{R}$.

◆ **Dạng 2:** Đánh giá bất phương trình mũ, logarit bằng các bất đẳng thức cơ bản

a) *Bất đẳng thức Côsi*

Với mọi số thực không âm $a_1,a_2,...,a_n$ ta có bất đẳng thức: $\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{n}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}$. Đẳng thức xảy ra khi $a_1=a_2=...=a_n$.

b) *Bất đẳng thức Bernoulli*

$(1+x)^r\ge 1+rx$ với mọi số nguyên $r\ge 0$ và với mọi số thực $x>-1$. Nếu số mũ r là chẵn, thì bất đẳng thức này đúng với mọi số thực x. Bất đẳng thức này trở thành bất đẳng thức nghiêm ngặt như sau:

$(1+x)^r>1+rx$ với mọi số nguyên $r\ge 2$ và với mọi số thực $x\ge 1$ với $x\ne 0$.

c) *Bất đẳng thức Bunhiacopxki*

Với 2 dãy số thực tùy ý $a_1,a_2,...,a_n$ và $b_1,b_2,...,b_n$ ta có bất đẳng thức:

$(a_1^2+a_2^2+...+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+...+b_n^2)\ge(a_1b_1+a_2b_2+...+a_nb_n)^2$

Đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \exists k\in\mathbb{R}: a_i=kb_i,\ \forall i=\overline{1,n}$.

5.2. Bài tập

Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2}+3^{x^2}+5^{x^2}\ge 3$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $(0;+\infty)$; **(C)** $[0;+\infty)$; **(D)** $\mathbb{R}$.

Giải:

Do $x^2\ge 0$ nên $\begin{cases}2^{x^2}\ge 2^0=1\\ 3^{x^2}\ge 3^0=1\\ 5^{x^2}\ge 5^0=1\end{cases}\Rightarrow 2^{x^2}+3^{x^2}+5^{x^2}\ge 3.$

Do đó, bất phương trình đã cho đúng với $\forall x \in \mathbb{R}$.

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S = \mathbb{R}$. **Chọn (D).**

Tập nghiệm của bất phương trình $3^{|x|} \le \sin x$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $\varnothing$; **(C)** $[0;+\infty)$; **(D)** $\{0\}$.

Giải:

Ta có: $|x| \ge 0 \Rightarrow 3^{|x|} \ge 3^0 = 1 \Rightarrow VT \ge 1$.

Mà $\sin x \le 1\ \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow VP \le 1$

$\Rightarrow VT \ge VP\ \forall x \in \mathbb{R}$

Do đó, để bất phương trình đã cho có nghiệm thì $VT = VP = 1 \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = 0 \\ \sin x = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x = 0$.

Chọn (D).

Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG về bất phương trình $4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} < 4$?

(A) Nghiệm đúng với mọi x thuộc $\mathbb{R}$. **(B)** Vô nghiệm.

(C) Tập nghiệm là $(0;+\infty)$. **(D)** Tập nghiệm là $[0;+\infty)$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si cho 2 số dương $4^{\sin^2 x}$ và $4^{\cos^2 x}$ ta có:

$4^{\sin^2 x} + 4^{\cos^2 x} \ge 2\sqrt{4^{\sin^2 x}.4^{\cos^2 x}} = 2\sqrt{4^{\sin^2 x + \cos^2 x}} = 2.2 = 4 \Rightarrow VT \ge 4\ \forall x \in \mathbb{R}$

Mà $VP = 4 \Rightarrow$ bất phương trình đã cho vô nghiệm. **Chọn (B).**

Tập nghiệm của bất phương trình $\log_3\left(\sqrt{x-3}+9\right) \le \log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+3\right)$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $\varnothing$; **(C)** $[3;+\infty)$; **(D)** $\{3\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x-3 \ge 0 \\ x-2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow x \ge 3$.

Ta có: $\sqrt{x-3} \ge 0 \Rightarrow \sqrt{x-3}+9 \ge 9 \Rightarrow \log_3\left(\sqrt{x-3}+9\right) \ge \log_3 9 = 2 \Rightarrow VT \ge 2$.

Với $x \ge 3$ thì $\dfrac{1}{\sqrt{x-2}} \le 1 \Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} + 3 \le 4 \Rightarrow \log_2\left(\dfrac{1}{\sqrt{x-2}}+3\right) \le \log_2 4 = 2 \Rightarrow VP \le 2$

Do đó, để bất phương trình đã cho có nghiệm thì $VT = VP = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x-3} = 0 \\ \sqrt{x-2} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x = 3$. **Chọn (D).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 5 Tập nghiệm của bất phương trình $2^{|x|}+3^{x^4}<-5x^2+2$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $\varnothing$; **(C)** $(0;+\infty)$; **(D)** $(-\infty;0)$.

Giải:

Ta có: $2^{|x|}+3^{x^4}\ge 2^0+3^0=2\Rightarrow VT\ge 2$.

$-5x^2+2\le 0+2=2\Rightarrow VP\le 2$

Do đó, $VT\ge VP\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ bất phương trình đã cho vô nghiệm. **Chọn (B).**

Bài tập 6 Tập nghiệm của bất phương trình $2^{x^2}+3^{x^2}+5^{x^2}\ge 4^{1-x^2}$ là:

(A) $\mathbb{R}$; **(B)** $\varnothing$; **(C)** $(0;+\infty)$; **(D)** $(-\infty;0)$.

Giải:

Ta có: $\begin{cases}2^{x^2}\ge 2^0=1\\3^{x^2}\ge 3^0=1\\5^{x^2}\ge 5^0=1\\6^{x^2}\ge 6^0=1\end{cases}\Rightarrow 2^{x^2}+3^{x^2}+5^{x^2}+6^{x^2}\ge 4\Rightarrow VT\ge 4$

Mà $4^{1-x^2}\le 4^{1-0}=4\Rightarrow VP\le 4$

Do đó, $VT\ge VP\ \forall x\in\mathbb{R}$

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là: $S=\mathbb{R}$. Do đó **Chọn** (A).

Bài tập 7 Tập nghiệm của bất phương trình $\sqrt{16-x^2}\le 3^x+3^{-x}$ là:

(A) $(-4;4)$; **(B)** $\varnothing$; **(C)** $[-4;4]$; **(D)** $(0;4]$.

Giải:

Điều kiện: $16-x^2\ge 0\Leftrightarrow x^2\le 16\Leftrightarrow -4\le x\le 4$.

Ta có: $\sqrt[4]{16-x^2}\le\sqrt[4]{16}=2\Rightarrow VT\le 2\ \forall x\in[-4;4]$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si cho 2 số không âm 3^x và 3^{-x} ta có:

$3^x+3^{-x}\ge 2\sqrt{3^x.3^{-x}}=2\sqrt{3^0}=2\Rightarrow VP\ge 2\ \forall x\in[-4;4]$

Do đó, bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x\in[-4;4]$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là $-4\le x\le 4$.

Chọn (C).

C. Tăng tốc

Bài tập 8 Tập nghiệm của bất phương trình $\log_6\left(\sqrt{6-x}+\sqrt{x+12}\right)\ge 1$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $(-12;6)$; **(C)** $[-12;6]$; **(D)** $\left\{-\frac{1}{3}\right\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}6-x\ge 0\\ x+3\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow -3\le x\le 6.$

Sử dụng bất đẳng thức Bunhiacopxki cho 2 bộ số: $\left(\sqrt{6-x},\sqrt{x+12}\right)$ và $(1;1)$ ta có:

$\left(\sqrt{6-x}.1+\sqrt{x+12}.1\right)^2\le(6-x+x+12)(1+1)=36$

$\Leftrightarrow \sqrt{6-x}+\sqrt{x+12}\le 6$

$\Leftrightarrow \log_6\left(\sqrt{6-x}+\sqrt{x+12}\right)\le\log_6 6$

$\Leftrightarrow \log_6\left(\sqrt{6-x}+\sqrt{x+12}\right)\le 1.$

Vậy để bất phương trình ban đầu có nghiệm thì $\log_6\left(\sqrt{6-x}+\sqrt{x+12}\right)=1$

$\Leftrightarrow \dfrac{\sqrt{6-x}}{1}=\dfrac{\sqrt{x+12}}{1}\Leftrightarrow\sqrt{6-x}=\sqrt{x+12}$

$\Leftrightarrow 6-x=x+12\Leftrightarrow x=-\frac{1}{3}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x=-\frac{1}{3}$. **Chọn (D).**

Bài tập 9 Tập nghiệm của bất phương trình $3^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-4}+3^{4\left(\frac{x}{\pi}\right)+8}\le 2.\cos^2 x$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $\mathbb{R}$; **(C)** $[-2\pi;+\infty)$; **(D)** $\{-2\pi\}$.

Giải:

Áp dụng bất đẳng thức Cô-Si cho hai số không âm $3^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-4}$ và $3^{4\left(\frac{x}{\pi}\right)+8}$, ta có:

$3^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-4}+3^{4\left(\frac{x}{\pi}\right)+8}\ge 2\sqrt{3^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-4}3^{4\left(\frac{x}{\pi}\right)+8}}2\sqrt{3^{\left(\frac{x}{\pi}+2\right)^2}}\ge 2$

Mặt khác ta lại có: $2.\cos^2 x\le 2$

Do đó bất phương trình đã cho có nghiệm khi và chỉ khi:

$$\begin{cases}3^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-4}+3^{4\left(\frac{x}{\pi}\right)+8}=2\\ 2\cos^2 x=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3^{\left(\frac{x}{\pi}\right)^2-4}=3^{4\left(\frac{x}{\pi}\right)+8}\\ \cos^2 x=1\\ \left(\dfrac{x}{\pi}+2\right)^2=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-2\pi\\ \sin x=0\\ \left(\dfrac{x}{\pi}\right)^2-4=\dfrac{4x}{\pi}+8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -2\pi \\ x = k\pi\ (k \in \mathbb{Z}) \end{cases} \Leftrightarrow x = -2\pi$$

Vậy bất phương trình đã cho có nghiệm là: $x = -2\pi$. **Chọn (D).**

[illegible]

[illegible] Tập nghiệm của bất phương trình $3^{x^2-4} + (x^2-4)3^{x-2} \geq 1$ là:

(A) $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$; **(B)** $(-\infty;-2]$;

(C) $[2;+\infty)$; **(D)** $(-2;2)$.

Giải:

- Nếu x = 2 hoặc x = -2 thì VT = 1 = VP $\Rightarrow$ bất phương trình nghiệm đúng với $x = \pm 2$.

- Nếu $|x| > 2$ thì $x^2 - 4 > 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-4} > 3^0 = 1 \\ (x^2-4)3^{x-2} > 0 \end{cases} \Rightarrow VT > 1 = VP \Rightarrow$ bất phương trình nghiệm đúng với $|x| > 2$.

- Nếu $|x| < 2$ thì $x^2 - 4 < 0 \Rightarrow \begin{cases} 3^{x^2-4} < 3^0 = 1 \\ (x^2-4)3^{x-2} < 0 \end{cases} \Rightarrow VT < 1 = VP \Rightarrow$ bất phương trình không nghiệm đúng với $|x| < 2$.

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $(-\infty;-2] \cup [2;+\infty)$. **Chọn (A).**

[illegible] Tập nghiệm của bất phương trình $\left(\sqrt[3]{x} + 1\right)^9 + \sqrt[3]{x}.5^{x-1} \geq 1$ là:

(A) $\{0\}$; **(B)** $(0;+\infty)$; **(C)** $[0;+\infty)$; **(D)** $(-\infty;0]$.

Giải:

+ Nếu $x < 0$ thì $\sqrt[3]{x} < 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[3]{x}+1\right)^9 < 1 \\ \sqrt[3]{x}.5^{x-1} < 0 \end{cases} \Rightarrow VT < 1 = VP \Rightarrow$ bất phương trình không nghiệm đúng trên $(-\infty;0)$

+ Nếu $x \geq 0$ thì $\sqrt[3]{x} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} \left(\sqrt[3]{x}+1\right)^9 \geq 1 \\ \sqrt[3]{x}.5^{x-1} \geq 0 \end{cases} \Rightarrow VT \geq 1 = VP \Rightarrow$ bất phương trình nghiệm đúng với $\forall x \in [0;+\infty)$

Vậy nghiệm của bất phương trình đã cho là: $x \geq 0$. **Chọn (C).**

[illegible] Trong các nghiệm (x; y) của bất phương trình: $\log_{x^2+2y^2}(2x+y) \geq 1$ (*)

hãy chỉ ra nghiệm có tổng 2x + y lớn nhất.

(A) $(3;5)$; **(B)** $\left(2;\frac{1}{2}\right)$; **(C)** $(4;9)$; **(D)** $\left(\frac{1}{2};\frac{5}{2}\right)$.

Giải:

Bất phương trình đã cho $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2+2y^2>1 \\ 2x+y\geq x^2+2y^2 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} 0<x^2+2y^2<1 \\ 0<2x+y\leq x^2+2y^2 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$

Xét T = 2x + y với (x; y) là 1 nghiệm của (*).

+ Nếu (x; y) thỏa mãn (1) thì $x^2+2y^2\leq 2x+y \Leftrightarrow (x-1)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\leq\frac{9}{8}$

Theo Bunhiacopxki ta có:

$$\left[2(x-1)+\frac{1}{\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right]^2\leq\frac{9}{8}\left[(x-1)^2+\left(\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2\right]\leq\frac{9}{8}.\frac{9}{2}=\frac{81}{16}$$

$$\Rightarrow 2x+y-\frac{9}{4}\leq\frac{9}{4}\Rightarrow T\leq\frac{9}{2}.$$

Vậy $T\leq\frac{9}{2}$ $\forall(x;y)$ nghiệm đúng (*).

$$T=\frac{9}{2}\Leftrightarrow\begin{cases} 2x+y=\frac{9}{2} \\ \frac{x-1}{2}=\frac{\sqrt{2}y-\frac{1}{2\sqrt{2}}}{\frac{1}{\sqrt{2}}} \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} x=2 \\ y=\frac{1}{2} \end{cases} \text{ (Thỏa mãn (1))}$$

+ Nếu (x; y) thỏa mãn (1) thì:

$T=2x+y\leq x^2+2y^2<1\Rightarrow T<1.$

Vậy nghiệm $(x;y)=\left(2;\frac{1}{2}\right)$ làm cho T lớn nhất. **Chọn (B).**

Hồ đổi màu
trên đỉnh núi Kelimutu ở Indonesia

Kelimutu là một ngọn núi lửa nhỏ nổi tiếng ở đảo Flores, Indonesia. Điều ấn tượng nhất là trên đỉnh của ngọn núi lửa này có ba hồ được hình thành từ các miệng núi lửa có màu sắc rất độc đáo. Dù cùng nằm trên đỉnh của một ngọn núi lửa, nhưng nước trong các hồ này lại thay đổi màu sắc một cách định kỳ khác nhau từ đỏ và nâu sang màu ngọc lam và xanh lục tạo nên một cảnh sắc tuyệt đẹp.

VẤN ĐỀ 4

HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

DẠNG 1. GIẢI HỆ MŨ – LÔGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP BIẾN ĐỔI TƯƠNG ĐƯƠNG

I. PHƯƠNG PHÁP

Sử dụng các công thức mũ và lôgarit để biến đổi hệ đã cho thành hệ cơ bản. Sau đó dùng các phương pháp thế, phương pháp cộng, … để giải.

II. BÀI TẬP

A. Khởi động

Bài tập 1. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2^x + 2^y = 3 \\ x + y = 1 \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x + 2^{1-x} = 3 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} + 2^{1-x} = 3 \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2x} - 3.2^x + 2 = 0 \\ y = 1 - x \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 2 \end{array}\right. \\ y = 1 - x \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 1 \\ y = 0 \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy hệ phương trình có 2 nghiệm là: $\{(0;1);(1;0)\}$.

Chọn (C).

Bài tập 2. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2^x + 2^y = 5 \\ 2^{x+y} = 4 \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 5 - 2^x \\ 2^x.2^y = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 5 - 2^x \\ 2^x.(5 - 2^x) = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 5 - 2^x \\ 2^{2x} - 5.2^x + 4 = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^y = 5 - 2^x \\ \left[\begin{array}{l} 2^x = 1 \\ 2^x = 4 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^x = 1 \\ 2^y = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^x = 4 \\ 2^y = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0; y = 2 \\ x = 2; y = 0 \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y) \in \{(0;2);(2;0)\}$. **Chọn (C).**

Lưu ý: Từ phương trình thứ hai ta có thể rút y theo x (hoặc x theo y) và thế vào phương trình thứ nhất để giải nhưng cách này sẽ lâu hơn!

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2^x = 4y \\ 4^x = 32y \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4y \\ 2^{2x} = 32y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4y \\ (4y)^2 = 32y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4y \\ 16y^2 - 32y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2^x = 4y \\ 16y(y-2) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ 2^x = 0 \end{cases} (VN) \\ \begin{cases} y = 2 \\ 2^x = 8 = 2^3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ x = 3 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: (x; y) = (3; 2). **Chọn (B).**

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \log_3 x + \log_3 y = 2 + \log_3 2 \\ \log_{27}(x+y) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3 xy = \log_3 9 + \log_3 2 = \log_3 18 \\ \log_{3^3}(x+y) = \dfrac{2}{3} \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} xy = 18 \\ \dfrac{1}{3}\log_3(x+y) = \dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} xy = 18 \\ x + y = 3^2 = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 3; y = 6 \\ x = 6; y = 3 \end{array}\right..$$

So sánh với điều kiện, suy ra tập nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)\in\{(3;6);(6;3)\}$.

Chọn (C).

Lưu ý: Sau khi tìm ra x, y thì cần so sánh với điều kiện để kết luận nghiệm (trong bài toán này không có nghiệm ngoại lai).

Bài tập 5 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x^2+2y=4x-1\\ 2\log_3(x-1)-\log_{\sqrt{3}}(y+1)=0\end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x-1>0\\ y+1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>1\\ y>-1\end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2y=4x-1\\ \log_3(x-1)-\log_{\sqrt{3}}(y+1)=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2+2y=4x-1\\ x-1=y+1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y=x-2\\ x^2-2x-3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;y=-3\\ x=3;y=1\end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, suy ra tập nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=(3;1)$.

Chọn (B).

Bài tập 6 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}x^2=y^4\\ \log_2\dfrac{x}{y}=\log_y x\end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 3; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\dfrac{x}{y}>0\\ x>0\\ 0<y\neq1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>0\\ 0<y\neq1\end{cases}$.

Với điều kiện trên thì $x^2=y^4\Leftrightarrow x=y^2$. Thế vào phương trình thứ hai ta được:

$\log_2 y=\log_y y^2\Leftrightarrow\log_2 y=2\Leftrightarrow y=2^2=4$ (Thỏa mãn) $\Rightarrow x=4^2=16$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (16; 4). **Chọn (A).**

Bài tập 7. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}4^{x+y}=128\\5^{3x-2y-3}=1\end{cases}$ là:

(A) 3; (B) 0; (C) 2; (D) 1.

Giải:

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}2^{2(x+y)}=2^7\\5^{3x-2y-3}=5^0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2(x+y)=7\\3x-2y-3=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x+2y=7\\3x-2y=3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}5x=10\\x+y=\frac{7}{2}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=2\\y=\frac{3}{2}\end{cases}.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(2;\frac{3}{2}\right)$. **Chọn (D).**

Bài tập 8. Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}3^{x^2+y^2}=81\\\log_2 x+2\log_4 y=1\end{cases}$ là:

(A) 3; (B) 1; (C) 2; (D) 0.

Giải:

Điều kiện: $x>0; y>0$.

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}3^{x^2+y^2}=3^4\\\log_2 x+2\log_{2^2} y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}3^{x^2+y^2}=3^4\\\log_2 x+2.\frac{1}{2}\log_2 y=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=4\\\log_2 x+\log_2 y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=4\\\log_2 xy=1\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2+y^2=4\\xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2-2xy=4\\xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x+y)^2=8\\xy=2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=\pm2\sqrt{2}\\xy=2\end{cases}$

+ Với $x+y=2\sqrt{2}$ thì x, y là nghiệm của phương trình:

$t^2-2\sqrt{2}t+2=0 \Leftrightarrow \left(t-\sqrt{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow t=\sqrt{2} \Rightarrow x=y=\sqrt{2}$ (Thỏa mãn điều kiện)

+ Với $x+y=-2\sqrt{2}$ thì x, y là nghiệm của phương trình:

$t^2+2\sqrt{2}t+2=0 \Leftrightarrow \left(t+\sqrt{2}\right)^2=0 \Leftrightarrow t=-\sqrt{2} \Rightarrow x=y=-\sqrt{2}$ (Không thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)$.

Chọn (B).

Lưu ý: Biết $\begin{cases}x+y=S\\xy=P\end{cases}$ thì x, y là nghiệm của phương trình: $t^2-Sx+P=0$.

Bài tập 9 Số nghiệm của hệ phương trình $\log_2(3x-1)+\dfrac{1}{\log_{x+3}2}=2+\log_2(x+1)$ là:

(A) 3; **(B)** 0; **(C)** 1; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 3x-1>0 \\ 0<x+3\neq 1 \\ x+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow x>\dfrac{1}{3}$.

Khi đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow \log_2(3x-1)+\log_2(x+3)=2+\log_2(x+1)$

$\Leftrightarrow \log_2(3x-1)(x+3)=\log_2 4(x+1)$

$\Leftrightarrow (3x-1)(x+3)=4(x+1) \Leftrightarrow 3x^2+4x-7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-\dfrac{7}{3}\ (L) \end{array}\right.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: x = 1. **Chọn (C).**

2. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 10 Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4^{(x-y)^2-1}=1 \\ 5^{3x-2y-3}=125 \end{cases}$ là:

(A) $\{(4;3)\}$; **(B)** $\{(8;7)\}$; **(C)** $\{(3;4);(7;8)\}$; **(D)** $\{(4;3);(8;7)\}$.

Giải:

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 4^{(x-y)^2-1}=4^0 \\ 5^{3x-2y-3}=5^3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2-1=0 \\ 3x-2y-3=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)^2-1=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y-1)(x-y+1)=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y-1=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} x-y+1=0 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-2y=2 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-2y=-2 \\ 3x-2y=6 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=4;y=3 \\ x=8;y=7 \end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\{(4;3);(8;7)\}$. **Chọn (D).**

Bài tập 11 Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2^x.3^y = 12 & (1) \\ 3^x.2^y = 18 & (2) \end{cases}$.

(A) 3; **(B)** 0; **(C)** 1; **(D)** 2.

Giải:

Chia vế theo vế của phương trình (1) cho phương trình (2) ta có:

$$\frac{2^x.3^y}{3^x.2^y} = \frac{12}{18} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x.\left(\frac{3}{2}\right)^y = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^x.\left(\frac{2}{3}\right)^{-y} = \frac{2}{3}$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x-y} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow x - y = 1 \Leftrightarrow y = x - 1.$$

Khi đó, phương trình $(1) \Leftrightarrow 2^x.3^{x-1} = 12 \Leftrightarrow 2^x.3^x = 36$

$\Leftrightarrow 6^x = 6^2 \Leftrightarrow x = 2 \Rightarrow y = 2 - 1 = 1.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (2; 1). **Chọn (C).**

Bài tập 12 Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \log_3(2x - y + 2) + \log_{\frac{1}{3}} x = 1 \\ 2^x + 2^y = 5 \end{cases}$.

(A) 3; **(B)** 1; **(C)** 0; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x - y + 2 > 0 \\ x > 0 \end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3(2x - y + 2) - \log_3 x = 1 \\ 2^x + 2^y = 5 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_3\left(\frac{2x - y + 2}{x}\right) = 1 \\ 2^x + 2^y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2x - y + 2}{x} = 3 \\ 2^x + 2^y = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y + 2 = 3x \\ 2^x + 2^y = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ 2^x + 2^{-x+2} = 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ 2^x + 4.2^{-x} = 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = -x + 2 \\ 2^{2x} - 5.2^x + 4 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x + 2 \\ 2^x = 4 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x + 2 \\ 2^x = 1 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = -x + 2 \\ x = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} y = -x + 2 \\ x = 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2; y = 0 \\ x = 0; y = 2 \end{array}\right..$$

So sánh với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (2; 0). **Chọn (B).**

Bài tập 13 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4^{-2x}+4^{2y}=\dfrac{17}{256} \\ x+y=1 \end{cases}$ là:

(A) 3; **(B)** 2; **(C)** 0; **(D)** 1.

Giải:

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 16^{-x}+16^{y}=\dfrac{17}{256} \\ x=1-y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 16^{y-1}+16^{y}=\dfrac{17}{256} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ \left(\dfrac{1}{16}+1\right).16^{y}=\dfrac{17}{256} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ \dfrac{17}{16}.16^{y}=\dfrac{17}{256} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1-y \\ 16^{y}=\dfrac{1}{16}=16^{-1} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=-1 \\ x=2 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (2; -1). **Chọn (D).**

Bài tập 14 Tìm tập nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\frac{1}{4}}(y-x)-\log_4\dfrac{1}{y}=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$.

(A) $\{(3;4)\}$; **(B)** $\{(-3;-4)\}$; **(C)** $\{(3;4);(-3;-4)\}$; **(D)** $\{(4;3)\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y-x>0 \\ \dfrac{1}{y}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y-x>0 \\ y>0 \end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} -\log_4(y-x)+\log_4 y=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \log_4\dfrac{y}{y-x}=1 \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{y}{y-x}=4 \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=4y-4x \\ x^2+y^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x=3y \\ x^2+y^2=25 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{3}x \\ x^2+\dfrac{16}{9}x^2=25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=\dfrac{4}{3}x \\ x^2=9 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=3;y=4 \\ x=-3;y=-4 \end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (3; 4). **Chọn (A).**

Bài tập 14 Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=2 & (1) \\ (x+1)^{y^2+y+2}=1 & (2) \end{cases}$.

(A) 3; **(B)** 2; **(C)** 0; **(D)** 1.

Giải:

Xét phương trình (2): $(x+1)^{y^2+y+2}=1$. Xảy ra các trường hợp sau đây:

+ Trường hợp 1: $x+1=0 \Leftrightarrow x=-1$. Thay vào phương trình (1) ta có: y = 2 – (-1) = 3.

+ Trường hợp 2: $\begin{cases} 0<x+1\neq 1 \\ y^2+y+2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0<x+1\neq 1 \\ \left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{7}{4} \end{cases}$ (VN)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (-1; 3). **Chọn (D).**

Lưu ý: Phương trình: $a^{f(x)}=1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=1 \\ \begin{cases} 0<a\neq 1 \\ f(x)=0 \end{cases} \end{array}\right.$.

Tăng tốc

Bài tập 16 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \log_x(3x+2y)=2 \\ \log_y(2x+3y)=2 \end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 0<x\neq 1 \\ 0<y\neq 1 \\ 3x+2y>0 \\ 2x+3y>0 \end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 3x+2y=x^2 \\ 2x+3y=y^2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-y=x^2-y^2 \\ 2x+3y=y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y-1)=0 \\ 2x+3y=y^2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x-y=0 \\ 2x+3y=y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x+y-1=0 \\ 2x+3y=y^2 \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 2y + 3y = y^2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -y + 1 \\ 2(-y+1) + 3y = y^2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = y \\ 5y = y^2 \end{cases} \quad (1) \\ \begin{cases} x = -y + 1 \\ y + 2 = y^2 \end{cases} \quad (2) \end{array}\right.$$

Giải hệ (1):

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y = 5 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = y = 0 \\ x = y = 5 \end{array}\right..$$

Giải hệ (2):

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 1 \\ y^2 - y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + 1 \\ \left[\begin{array}{l} y = -1 \\ y = 2 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = -1; x = 2 \\ y = 2; x = -1 \end{array}\right..$$

So sánh với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (5; 5). **Chọn (A).**

[illegible] Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 4x^2 - y^2 = 2 \\ \log_2(2x+y) - \log_2(2x-y) = 1 \end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x + y > 0 \\ 2x - y > 0 \end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)(2x+y) = 2 \\ \log_2\left(\dfrac{2x+y}{2x-y}\right) = 1 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)(2x+y) = 2 \\ \dfrac{2x+y}{2x-y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)(2x+y) = 2 \\ 2x + y = 2(2x-y) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(2x-y)^2 = 2 \\ 2x + y = 2(2x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (2x-y)^2 = 1 \\ 2x + y = 2(2x-y) \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x - y = 1 \\ 2x + y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x - y = -1 \\ 2x + y = -2 \end{cases} \quad (L) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{2}; x = \frac{3}{4}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x; y) = \left(\dfrac{3}{4}; \dfrac{1}{2}\right)$.

Chọn (A).

Bài tập 18 Tìm nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}\log_x\left(x^{2016}+2x^2-3x-5y\right)=2016\\ \log_y\left(y^{2016}+2y^2-3y-5x\right)=2016\end{cases}$.

(A) (0; 0); **(B)** (7; 7); **(C)** (3; 3); **(D)** (4; 4).

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}0<x\neq 1\\ 0<y\neq 1\\ x^{2016}+2x^2-3x-5y>0\\ y^{2016}+2y^2-3y-5x>0\end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases}x^{2016}+2x^2-3x-5y=x^{2016}\\ y^{2016}+2y^2-3y-5x=y^{2016}\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-3x-5y=0\\ 2y^2-3y-5x=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2x^2-2y^2+2x-2y=0\\ 2x^2-3x-5y=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}(x-y)(x+y+1)=0\\ 2x^2-3x-5y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x-y=0\\ 2x^2-3x-5y=0\end{cases}\\ \begin{cases}x+y+1=0\\ 2x^2-3x-5y=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}y=x\\ 2x^2-8x=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=-x-1\\ 2x^2+2x+5=0\ (\text{VN})\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=y=0\\ x=y=4\end{array}\right.$.

So sánh với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (4; 4).

Chọn (D).

Bài tập 19 Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\ln^2 x=\ln^2 y+\ln^2 xy\\ \ln^2(x-y)+\ln x.\ln y=0\end{cases}$ là:

(A) $\varnothing$;

(B) $\left\{(2;1);\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$;

(C) $\left\{\left(\sqrt{2};\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$;

(D) $\{(2;1)\}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x>0\\ y>0\\ x-y>0\end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases}\ln^2 x=\ln^2 y+(\ln x+\ln y)^2\\ \ln^2(x-y)+\ln x.\ln y=0\end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases}\ln^2 x=\ln^2 y+\ln^2 x+\ln^2 y+2\ln x.\ln y\\ \ln^2(x-y)+\ln x.\ln y=0\end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\ln^2 y + 2\ln x.\ln y = 0 \\ \ln^2(x-y) + \ln x.\ln y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ln y(\ln x + \ln y) = 0 \\ \ln^2(x-y) + \ln x.\ln y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \begin{cases} \ln y = 0 \\ \ln^2(x-y) + \ln x.\ln y = 0 \end{cases} & (1) \\ \begin{cases} \ln x + \ln y = 0 \\ \ln^2(x-y) + \ln x.\ln y = 0 \end{cases} & (2) \end{array} \right.$$

+ Giải hệ (1):

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 0 \\ \ln^2(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ln y = 0 \\ \ln(x-y) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x - y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 \\ x = 2 \end{cases}$

(Thỏa mãn điều kiện)

+ Giải hệ (2):

Ta có: $(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \ln x = -\ln y = \ln y^{-1} = \ln\dfrac{1}{y} \\ \ln^2(x-y) + \ln x.\ln y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{1}{y} \\ \ln^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right) + \ln x.\ln\dfrac{1}{x} = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ \ln^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right) = \ln^2 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{1}{x} \\ x^2 = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \sqrt{2} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \end{cases}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của hệ là $S = \left\{(2;1); \left(\sqrt{2}; \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$. **Chọn (B).**

Bài tập 20 Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{4^x + 2^{x+1}}{2^x + 2} = y \end{cases}$.

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ \dfrac{2^x(2^x + 2)}{2^x + 2} = y \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{3x} = 5y^2 - 4y \\ 2^x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y^3 = 5y^2 - 4y \\ 2^x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(y^2 - 5y + 4) = 0 \\ 2^x = y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y=0 \\ 2^x=0 \end{cases} (L) \\ \begin{cases} y=1 \\ 2^x=1 \end{cases} \\ \begin{cases} y=4 \\ 2^x=4 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=1; x=0 \\ y=4; x=2 \end{array}\right..$$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y) \in \{(0;1);(2;4)\}$. **Chọn (B).**

Bài tập 21 Tìm nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} 4^{2x^2+\frac{1}{2}} - 9.4^{x^2+x} + 4^{2x+1} = 0 & (1) \\ 2x-5 < \sqrt{-x^2+4x-3} & (2) \end{cases}$

(A) $1 \le x < \dfrac{14}{5}$; **(B)** $1 \le x < \dfrac{5}{2}$; **(C)** $x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$; **(D)** $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$.

Giải:

Điều kiện: $-x^2+4x-3 \ge 0 \Leftrightarrow 1 \le x \le 3$.

Giải (1):

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 2.4^{2x^2} - 9.4^{x^2+x} + 4.4^{2x} = 0 \Leftrightarrow 2.4^{x^2-x} - 9 + 4.4^{x-x^2} = 0$

Đặt $t = 4^{x^2-x} = 4^{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}} \ge 4^{-\frac{1}{4}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Khi đó phương trình trở thành:

$$2t - 9 + \frac{4}{t} = 0 \Leftrightarrow 2t^2 - 9t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=4 \\ t=\frac{1}{2} \ (L) \end{array}\right.$$

Với $t=4$ thì $4^{x^2-x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - x = 1 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = \dfrac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$.

So sánh với điều kiện suy ra $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (3)

Giải (2):

$$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2x-5<0 \\ -x^2+4x-3 \ge 0 \end{cases} \\ \begin{cases} 2x-5 \ge 0 \\ (2x-5)^2 < -x^2+4x-3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x<\frac{5}{2} \\ 1 \le x \le 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x \ge \frac{5}{2} \\ 5x^2-24x+28<0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 1 \le x < \frac{5}{2} \\ \begin{cases} x \ge \frac{5}{2} \\ 2 < x < \frac{14}{5} \end{cases} \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow 1 \le x < \frac{14}{5} \quad (4)$$

Từ (3) và (4) suy ra nghiệm của hệ là $x = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$. **Chọn (D).**

Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 4^{\frac{x}{y}+\frac{y}{x}} = 32 \\ \log_3(x-y) = 1 - \log_3(x+y) \end{cases}$.

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y \neq 0 \\ x - y > 0 \\ x + y > 0 \end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{2\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)} = 2^5 \\ \log_3(x-y) + \log_3(x+y) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\left(\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}\right) = 5 \\ \log_3(x-y)(x+y) = 1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x} = \dfrac{5}{2} & (1) \\ (x-y)(x+y) = 3 & (2) \end{cases}$

Đặt $\dfrac{x}{y} = t \Rightarrow$ Phương trình (1) trở thành:

$t + \dfrac{1}{t} = \dfrac{5}{2} \Rightarrow t^2 - \dfrac{5}{2}t + 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$.

+ Với t = 2 thì $\dfrac{x}{y} = 2 \Rightarrow x = 2y$, thay vào phương trình (2) ta có: $(2y-y)(2y+y) = 3$

$\Leftrightarrow y.3y = 3 \Leftrightarrow 3y^2 = 3 \Leftrightarrow y^2 = 1 \Leftrightarrow y = \pm 1$

Với y = 1 thì x = 2y = 2 (thỏa mãn)

Với y = -1 thì x = 2y = -2 (không thỏa mãn điều kiện)

+ Với $t = \dfrac{1}{2}$ thì $\dfrac{x}{y} = \dfrac{1}{2} \Rightarrow y = 2x$, thay y vào phương trình (2) ta có: (x – 2x)(x + 2x) = 3

$\Leftrightarrow -x.3x = 3 \Leftrightarrow -3x^2 = 3 \Leftrightarrow x^2 = -1 \Rightarrow$ vô nghiệm.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (2; 1). **Chọn (A).**

Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \left(\sqrt{x+1}-1\right).3^y = \dfrac{3\sqrt{4-x}}{x} & (1) \\ y + \log_3 x = 1 & (2) \end{cases}$

(A) 3; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+1\ge 0 \\ 4-x\ge 0 \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow 0<x\le 4.$

Từ phương trình (2) ta được: $y=1-\log_3 x \Leftrightarrow 3^y=3^{1-\log_3 x}=\dfrac{3}{3^{\log_3 x}}=\dfrac{3}{x}$

Thế $3^y=\dfrac{3}{x}$ vào phương trình (1) ta được:

$$\left(\sqrt{x+1}-1\right).\frac{3}{x}=\frac{3\sqrt{4-x}}{x} \Leftrightarrow \sqrt{x+1}-1=\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow \sqrt{x+1}=\sqrt{4-x}+1 \Leftrightarrow x+1=4-x+1+2\sqrt{4-x} \Leftrightarrow 2x-4=2\sqrt{4-x}$$

$$\Leftrightarrow x-2=\sqrt{4-x} \Leftrightarrow \begin{cases} x-2\ge 0 \\ (x-2)^2=4-x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-4x+4=4-x \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ x^2-3x=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge 2 \\ \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=3 \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow x=3 \text{ (Thỏa mãn)}$$

Với x = 3 thì $y=1-\log_3 3=1-1=0.$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (3; 0). **Chọn (C).**

Lưu ý: Phương trình: $f(x)=\sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)\ge 0 \\ \left[f(x)\right]^2=g(x) \end{cases}.$

Bài tập 24 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^2-y^2=3 \\ \log_3(x+y)-\log_2(x-y)=1 \end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+y>0 \\ x-y>0 \end{cases}.$

Khi đó, hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} (x-y)(x+y)=3 & (1) \\ \log_3(x+y)-\log_2(x-y)=1 & (2) \end{cases}$

Lấy logarit cơ số 3 hai vế của phương trình (1) ta được: $\log_3(x+y)+\log_3(x-y)=1$ (3)

Trừ vế theo vế phương trình (3) và (2) ta được:

$$\log_3(x-y)+\log_2(x-y)=0 \Leftrightarrow \log_3 2.\log_2(x-y)+\log_2(x-y)=0$$

$$\Leftrightarrow \log_2(x-y).(\log_3 2+1)=0 \Leftrightarrow \log_2(x-y)=0 \Leftrightarrow x-y=1 \quad (4)$$

Từ (1) và (4) ta có hệ $\begin{cases} x-y=1 \\ (x-y)(x+y)=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-y=1 \\ x+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

So sánh với điều kiện, ta có nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (2; 1). **Chọn (A).**

Bài tập 25 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2^x-2^y=(y-x)(xy+2) & (1) \\ x^2+y^2=1 & (2) \end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Thay (2) vào (1) ta có: $2^x-2^y=(y-x)(x^2+xy+y^2)$

$\Leftrightarrow 2^x-2^y=y^3-x^3$

$\Leftrightarrow 2^x+x^3=2^y+y^3$.

Xét hàm đặc trưng $f(t)=2^t+t^3$.

Ta có: $f'(t)=2^t\ln 2+3t^2>0\ \forall t\in\mathbb{R} \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$

$\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$

Thay x = y vào phương trình (2) ta có: $2x^2=2\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=\pm1$.

+ Với x = 1 thì y = x = 1.

+ Với x = -1 thì y = x = -1.

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)\in\{(1;1);(-1;-1)\}$. **Chọn (B).**

Bài tập 26 Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4 \\ \log_4 x-\log_4 y=1 \end{cases}$ là:

(A) $S=\varnothing$; **(B)** $S=\left\{\left(8\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)\right\}$;

(C) $S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right)\right\}$; **(D)** $S=\left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{8}\right);\left(8\sqrt{2};2\sqrt{2}\right)\right\}$.

Giải:

Điều kiện: x > 0; y > 0.

Khi đó, hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4 \\ \log_4 \dfrac{x}{y}=1 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^{\log_8 y}+y^{\log_8 x}=4 \\ \dfrac{x}{y}=4 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 4y \\ (4y)^{\log_8 y} + y^{\log_8 4y} = 4 \quad (1) \end{cases}$$

Đặt $\log_8 y = t \Rightarrow y = 8^t$. Khi đó phương trình (1) trở thành:

$$4^t.8^{t^2} + 4^t.8^{t^2} = 4 \Leftrightarrow 2.4^t.8^{t^2} = 4 \Leftrightarrow 4^t.8^{t^2} = 2 \Leftrightarrow 2^{2t}.2^{3t^2} = 2^1 \Leftrightarrow 2^{2t+3t^2} = 2^1 \Leftrightarrow 2t + t^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow 3t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \\ t = \frac{1}{2} \end{array}\right..$$

+ Với t = -1 thì $\log_8 y = -1 \Leftrightarrow y = 8^{-1} = \frac{1}{8} \Rightarrow x = 4.\frac{1}{8} = \frac{1}{2}$ (Thỏa mãn điều kiện)

+ Với $t = \frac{1}{2}$ thì $\log_8 y = \frac{1}{2} \Leftrightarrow y = 8^{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2} \Rightarrow x = 4.2\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình là: $S = \left\{\left(\frac{1}{2}; \frac{1}{8}\right); \left(8\sqrt{2}; 2\sqrt{2}\right)\right\}$. **Chọn (D).**

Bài tập 27. Cho hệ phương trình: $\begin{cases} \frac{1}{6}\log_5 x^6 - \log_5 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases}$. Tìm m để hệ phương trình có nghiệm.

(A) $m \in \mathbb{R}$; **(B)** $m > 0$; **(C)** $m < 0$; **(D)** $m \geq 0$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \neq 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5 |x| - \log_5 y = 0 \\ |x|^3 + y^2 - my = 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = y \\ y^3 + y^2 - my = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = y \\ y\left(y^2 + y - m\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |x| = y \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ y^2 + y - m = 0 \end{array}\right. \end{cases} \quad (L)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} |x| = y \\ f(y) = y^2 + y - m = 0 \end{cases}$$

Ta thấy: $y = |x| > 0$ (do $x \neq 0$). Vậy để hệ ban đầu có nghiệm thì $f(y) = y^2 + y - m = 0$ có nghiệm y > 0.

Ta có: $S = -\frac{b}{a} = -1 < 0$ nên để f(y) = 0 có nghiệm y > 0 thì f(y) = 0 phải có 2 nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow -m < 0 \Leftrightarrow m > 0$.

Vậy m cần tìm là: m > 0. **Chọn (B).**

DẠNG 2. GIẢI HỆ MŨ – LÔGARIT BẰNG CÁCH ĐẶT ẨN PHỤ

I PHƯƠNG PHÁP

- Đối với bài toán đặt một ẩn phụ: Thông thường thì ta lựa chọn một phương trình của hệ để biến đổi và đặt ẩn phụ để tìm ra mối liên hệ giữa x và y và kết hợp với phương trình còn lại của hệ ban đầu để giải.

- Đối với bài toán đặt hai ẩn phụ: Ta tìm mối liên hệ bằng cách dùng công thức mũ, loga hay các biến đổi đơn giản để đưa hệ về hệ đại số cơ bản (đối xứng, đẳng cấp, ...)

Chú ý: Sau khi đặt ẩn phụ, ta cần đi tìm điều kiện cho ẩn phụ, tức là đi tìm miền xác định cho bài toán mới. Tùy vào mục đích của ẩn phụ mà ta phải đi tìm điều kiện cho hợp lý (dễ, không sai sót). Nhưng lưu ý đối với bài toán chứa tham số ta cần tìm điều kiện cho thật chính xác.

II BÀI TẬP

Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2^{x+y} + 3^{y} = 5 \\ 2^{x+y}.3^{y-1} = 2 \end{cases}$ là:

(A) $\{(0;1)\}$; **(B)** $\{(1;0)\}$;

(C) $\{(0;1);(\log_2 3 - \log_3 2; \log_3 2)\}$; **(D)** $\{(0;1);(\log_2 3 - \log_3 2; \log_2 3)\}$.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = 2^{x+y} \\ v = 3^{y} \end{cases}$, ta có hệ phương trình: $\begin{cases} u + v = 5 \\ uv = 6 \end{cases} \Rightarrow$ u, v là nghiệm của phương trình:

$$t^2 - 5t + 6 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 2 \\ t = 3 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases} \end{array}\right..$$

+ Với $\begin{cases} u = 2 \\ v = 3 \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} 2^{x+y} = 2 \\ 3^{y} = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases}$.

+ Với $\begin{cases} u = 3 \\ v = 2 \end{cases}$ ta có: $\begin{cases} 2^{x+y} = 3 \\ 3^{y} = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = \log_2 3 \\ y = \log_3 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \log_2 3 - \log_3 2 \\ y = \log_3 2 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y) \in \{(0;1);(\log_2 3 - \log_3 2; \log_3 2)\}$.

Chọn (C).

Bài tập 2 Tìm các giá trị của x thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} 9^{2\cot x+\sin y}=3 \\ 9^{\sin y}-81^{\cot x}=2 \end{cases}$.

(A) $\frac{\pi}{2}+k\pi$; **(B)** $\frac{\pi}{6}+k2\pi$; **(C)** $\frac{5\pi}{6}+k2\pi$; **(D)** $k\pi$.

Giải:

Hệ phương trình $\Leftrightarrow \begin{cases} 9^{2\cot x}.9^{\sin y}=3 \\ 9^{\sin y}-9^{2\cot x}=2 \end{cases}$ (1)

Đặt $\begin{cases} u=-9^{2\cot x}<0 \\ v=9^{\sin y}>0 \end{cases}$. Khi đó hệ (2) trở thành: $\begin{cases} uv=-3 \\ v+u=2 \end{cases}$.

Khi đó, u, v là nghiệm của phương trình: $t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$.

Mà u < 0 và v > 0 nên u = - 1 và v = 3 $\Rightarrow$ Ta có hệ:

$$\begin{cases} -9^{2\cot x}=-1 \\ 9^{\sin x}=3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cot x=0 \\ \sin y=\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=\frac{\pi}{2}+k2\pi \\ \left[\begin{array}{l} y=\frac{\pi}{6}+k2\pi \\ y=\frac{5\pi}{6}+k2\pi \end{array}\right. \end{cases} \quad (k\in\mathbb{Z}).$$

Chọn (A).

Bài tập 3 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 2\lg x+3\lg y=8 \\ 5\lg x-6\lg y=11 \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: x > 0; y > 0.

Đặt $\begin{cases} u=\lg x \\ v=\lg y \end{cases}$. Khi đó, hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 2u+3v=8 \\ 5u-6v=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4u+6v=16 \\ 5u-6v=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u=27 \\ 5u-6v=11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u=3 \\ v=\frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lg x=3 \\ \lg y=\frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=10^3=1000 \\ y=10^{\frac{2}{3}}=\sqrt[3]{100} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=\left(1000;\sqrt[3]{100}\right)$. **Chọn (B).**

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 7^x - 16^y = 0 \\ 4^y - 49^x = 0 \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = 7^x > 0 \\ v = 4^y > 0 \end{cases}$. Khi đó hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u - v^2 = 0 \\ v - u^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v^2 \\ v - \left(v^2\right)^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v^2 \\ v - v^4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v^2 \\ v\left(1 - v^3\right) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = v^2 \\ v(1-v)\left(1 + v + v^2\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = v^2 \\ \left[\begin{array}{l} v = 0 \\ v = 1 \end{array}\right. \end{cases} (L) \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases} \text{(Thỏa mãn)}$$

Với $\begin{cases} u = 1 \\ v = 1 \end{cases}$, ta có: $\begin{cases} 7^x = 1 \\ 4^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: (x; y) = (0; 0).

Chọn (C).

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 3^{2x+2} + 2^{2y+2} = 17 \\ 2.3^{x+1} + 3.2^y = 8 \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 3; **(C)** 2; **(D)** 1.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = 3^x > 0 \\ v = 2^y > 0 \end{cases}$. Khi đó hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} 9u^2 + 4v^2 = 17 \\ 6u + 3v = 8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9u^2 - 6u + 1 = 0 \\ v = \dfrac{8 - 6u}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = \dfrac{1}{3} \\ v = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = \dfrac{1}{3} \\ 2^y = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ y = 1 \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: (x; y) = (-1; 1). **Chọn (D).**

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \sqrt{x} + 2\ln y = 3 \\ x - 3\ln y^2 = 1 \end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ y > 0 \end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{x} \geq 0 \\ v = \ln y \end{cases}$. Khi đó hệ đã cho trở thành:

$$\begin{cases} u + 2v = 3 \\ u^2 - 6v = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2v = 3 - u \\ u^2 + 3u - 10 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 2 \\ v = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{x} = 2 \\ \ln y = \dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 4 \\ y = \sqrt{e} \end{cases}.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y) = \left(4;\sqrt{e}\right)$. Do đó **Chọn (A).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 7 Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 9^{\log_2(xy)} = 3 + 2.(xy)^{\log_2 3} & (1) \\ x^2 + y^2 = 3x + 3y + 6 & (2) \end{cases}$ là:

(A) $\left\{\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2};\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$;

(B) $\left\{\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$;

(C) $\left\{\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2};\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$;

(D) $\left\{\left(\dfrac{5+\sqrt{17}}{2};\dfrac{5+\sqrt{17}}{2}\right);\left(\dfrac{5-\sqrt{17}}{2};\dfrac{5-\sqrt{17}}{2}\right)\right\}$;

Giải:

Điều kiện: $xy > 0$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 3^{2\log_2(xy)} - 2.3^{\log_2(xy)} - 3 = 0$

Đặt $t = 3^{\log_2(xy)} > 0 \Rightarrow$ Phương trình trở thành: $t^2 - 2t - 3 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = -1 \ (L) \\ t = 3 \end{array}\right.$

Với $t = 3$ thì $3^{\log_2(xy)} = 3 \Leftrightarrow \log_2(xy) = 1 \Leftrightarrow xy = 2 \quad (3)$

Ta có: $(2) \Leftrightarrow (x+y)^2 - 3(x+y) - 2xy - 6 = 0$

Thay $xy = 2$ vào ta được: $(x+y)^2 - 3(x+y) - 10 = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x + y = 5 \\ x + y = -2 \end{array}\right. \quad (4)$$

Từ (3) và (4) ta có: $\left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x + y = -2 \\ xy = 2 \end{cases} \ (VN) \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{cases} x + y = 5 \\ xy = 2 \end{cases} \Rightarrow$ x, y là nghiệm của phương trình: $t^2 - 5t + 2 = 0 \Leftrightarrow t = \dfrac{5 \pm \sqrt{17}}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$$(x;y)\in\left\{\left(\frac{5+\sqrt{17}}{2};\frac{5-\sqrt{17}}{2}\right);\left(\frac{5-\sqrt{17}}{2};\frac{5+\sqrt{17}}{2}\right)\right\}.$$

Chọn (C).

Bài tập 8 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\log_{\frac{1}{2}}(x+2y)+\log_2(3x-1)=1 & (1)\\ 3^x+3^{-4y}=4 & (2)\end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x+2y>0\\3x-1>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+2y>0\\x>\dfrac{1}{3}\end{cases}.$

Ta có: $(1)\Leftrightarrow-\log_2(x+2y)+\log_2(3x-1)=1$

$$\Leftrightarrow\log_2\frac{3x-1}{x+2y}=1\Leftrightarrow\frac{3x-1}{x+2y}=2\Leftrightarrow 3x-1=2x+4y\Leftrightarrow x=4y+1$$

Thay $x=4y+1$ vào (2) ta có: $3^{4y+1}+3^{-4y}=4\Leftrightarrow 3.3^{4y}+\dfrac{1}{3^{4y}}-4=0$

Đặt $t=3^{4y}>0$ thì phương trình trở thành: $3t+\dfrac{1}{t}-4=0\Leftrightarrow 3t^2-4t+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}t=1\\t=\dfrac{1}{3}\end{array}\right.$.

+ Với $t=1$ thì $3^{4y}=1\Leftrightarrow 4y=0\Leftrightarrow y=0\Rightarrow x=1$ (Thỏa mãn)

+ Với $t=\dfrac{1}{3}$ thì $3^{4y}=\dfrac{1}{3}=3^{-1}\Leftrightarrow 4y=-1\Leftrightarrow y=-\dfrac{1}{4}\Rightarrow x=0$ (Loại)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=(1;0)$.

Chọn (A).

Bài tập 9 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}2^{|2x|+1}-3.2^{|x|}=y^2-2\\2y^2-3y=2^{2|x|}-2\end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Đặt $u=2^{|x|}\ge 1$. Khi đó, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases}2u^2-3u=y^2-2\\2y^2-3y=u^2-2\end{cases}\Rightarrow 2(u^2-y^2)-3(u-y)=-(u^2-y^2)$$

$$\Leftrightarrow 3(u-y)(u+y-1)=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=y\\u+y-1=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}u=y\\y=1-u\end{array}\right..$$

+ Với u = y thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} u = y \\ 2u^2 - 3u = u^2 - 2 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} u = y \\ u^2 - 3u + 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = y = 1 \\ u = y = 2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} 2^{|x|} = 1 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} 2^{|x|} = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \pm 1 \\ y = 2 \end{cases} \end{array}\right..$$

+ Với y = 1 − u thì hệ $\Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - u \\ 2u^2 - 3u = (1-u)^2 - 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1 - u \\ u^2 - u + 2 = 0 \end{cases}$ (VN)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x; y) \in \{(0;1); (1;2); (-1;2)\}$.

Chọn (D).

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \log_3 x + 3\sqrt{5 - \log_2 y} = 5 \\ 3\sqrt{\log_3 x - 1} - \log_2 y = -1 \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Đặt $\begin{cases} u = \sqrt{5 - \log_2 y} \ge 0 \\ v = \sqrt{\log_3 x - 1} \ge 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} u^2 = 5 - \log_2 y \\ v^2 = \log_3 x - 1 \end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho trở thành:

$$\begin{cases} v^2 + 1 + 3u = 5 \\ 3v + u^2 - 5 = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 + 3u = 4 \\ u^2 + 3v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v^2 - u^2 + 3u - 3v = 0 \\ u^2 + 3v = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (v-u)(v+u-3) = 0 \\ u^2 + 3v = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} u = v \\ u + v = 3 \end{array}\right. \\ u^2 + 3v = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} u = v \\ u^2 + 3u - 4 = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} v = 3 - u \\ u^2 + 9 - 3u = 3 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = v = 1 \\ u = v = -4 \ (L) \\ \begin{cases} v = 3 - u \\ u^2 - 3u + 6 = 0 \ (VN) \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow u = v = 1$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{5 - \log_2 y} = 1 \\ \sqrt{\log_3 x - 1} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5 - \log_2 y = 1 \\ \log_3 x - 1 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \log_2 y = 4 \\ \log_3 x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2^4 = 16 \\ x = 3^2 = 9 \end{cases}$$

Thay x = 9, y = 16 vào hệ phương trình đã cho thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: (x; y) = (9; 16). **Chọn (B).**

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} \log_2 x + \log_{xy} 16 = 4 - \dfrac{1}{\log_y 2} & (1) \\ 4x^4 + 8x^2 + xy = 16x^2\sqrt{4x+y} & (2) \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x > 0 \\ 0 < xy \neq 1. \\ 0 < y \neq 1 \end{cases}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \log_2 x + \log_{xy} 16 = 4 - \log_2 y \Leftrightarrow \log_2 x + \log_2 y = 4 - \dfrac{1}{\log_{2^4} xy}$

$\Leftrightarrow \log_2 xy = 4 - \dfrac{4}{\log_2 xy}$.

Đặt $t = \log_2 xy$, ta có phương trình:

$t = 4 - \dfrac{4}{t} \Leftrightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Leftrightarrow (t-2)^2 = 0 \Leftrightarrow t = 2$

Với $t = 2$ thì $\log_2 xy = 2 \Leftrightarrow xy = 4 \Rightarrow y = \dfrac{4}{x}$.

Thay $y = \dfrac{4}{x}$ vào (2) ta được:

$4x^4 + 8x^2 + 4 = 16x^2\sqrt{4x + \dfrac{4}{x}} \Leftrightarrow (x^2+1)^2 = 8x^2\sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{8}\left(\dfrac{x^2+1}{x}\right)^2 = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}} \Leftrightarrow \dfrac{1}{8}\left(x + \dfrac{1}{x}\right)^2 = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}}$.

Đặt $u = \sqrt{x + \dfrac{1}{x}} \geq \sqrt{2}$. Ta có phương trình:

$\dfrac{1}{8}u^4 = u \Leftrightarrow u(u^3 - 8) = 0 \Leftrightarrow u(u-2)(u^2 + 2u + 4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} u = 0 \quad (L) \\ u = 2 \end{array}\right.$

Với $u = 2$ thì $\sqrt{x + \dfrac{1}{x}} = 2 \Leftrightarrow x + \dfrac{1}{x} = 4 \Leftrightarrow x^2 - 4x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = 2 \pm \sqrt{3}$

Với $x = 2 + \sqrt{3}$ thì $y = \dfrac{4}{2+\sqrt{3}} = 4(2 - \sqrt{3})$ (Thỏa mãn điều kiện)

Với $x = 2 - \sqrt{3}$ thì $y = \dfrac{4}{2-\sqrt{3}} = 4(2 + \sqrt{3})$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là:

$(x;y) \in \left\{\left(2+\sqrt{3}; 4\left(2-\sqrt{3}\right)\right); \left(2-\sqrt{3}; 4\left(2+\sqrt{3}\right)\right)\right\}$.

Chọn (C).

Bài tập 12 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases}\log_{\sqrt{2}}(y+3x+7)=6\\ 2.8^x+2^{y+2}=17.2^{y+3x-1}\end{cases}$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 0; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $y + 3x + 7 > 0$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}\log_2\ y+3x+7\ =33\\ 2.8^x+4.2^y=\dfrac{17}{2}.2^{y+3x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y+3x+7=2\\ 4.2^{3x}+8.2^y=17.2^{y+3x}\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}a=2^{3x}\\ b=2^y\end{cases}$. Khi đó hệ trở thành:

$$\begin{cases}\log_2 a+\log_2 b=1\\ 4a+8b=17ab\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=2\\ 4a+8b=34\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}ab=2\\ a+2b=\dfrac{17}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left(\dfrac{17}{2}-2b\right).b=2\\ a=\dfrac{17}{2}-2b\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2b^2-\dfrac{17}{2}b+2=0\\ a=\dfrac{17}{2}-2b\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}b=4\\ a=\dfrac{1}{2}\end{cases}\\ \begin{cases}b=\dfrac{1}{4}\\ a=8\end{cases}\end{array}\right..$$

+ Với $\begin{cases}a=\dfrac{1}{2}\\ b=4\end{cases}$ ta có: $\begin{cases}2^{3x}=\dfrac{1}{2}=2^{-1}\\ 2^y=4=2^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=-1\\ y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=-\dfrac{1}{3}\\ y=2\end{cases}$ (Thỏa mãn điều kiện)

+ Với $\begin{cases}a=8\\ b=\dfrac{1}{4}\end{cases}$ ta có: $\begin{cases}2^{3x}=8=2^3\\ 2^y=\dfrac{1}{4}=2^{-2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3x=3\\ y=-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2\end{cases}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)\in\left\{\left(-\dfrac{1}{3};2\right);(1;-2)\right\}$. **Chọn (B).**

Đi về đích

Bài tập 13 Tìm số cặp (x; y) thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}xy+2x+y=6\\ \log_2(x+1).\log_2(y+2)=2\end{cases}$.

(A) Vô số; **(B)** 0; **(C)** 1; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}x+1>0\\ y+2>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>-1\\ y>-2\end{cases}$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow\begin{cases}(x+1)(y+2)=8\\ \log_2(x+1)\log_2(y+2)=2\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases} x+1=2^a \\ y+2=2^b \end{cases}$ ta được hệ phương trình: $\begin{cases} 2^{a+b}=8 \\ ab=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+b=3 \\ ab=2 \end{cases}$

$\Rightarrow$ a, b là nghiệm của phương trình: $t^2-3t+2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=2 \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} a=1 \\ b=2 \end{cases} \\ \begin{cases} a=2 \\ b=1 \end{cases} \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x+1=2 \\ y+2=4 \end{cases} \\ \begin{cases} x+1=4 \\ y+2=2 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=1 \\ y=2 \end{cases} \\ \begin{cases} x=3 \\ y=0 \end{cases} \end{array}\right.$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y) \in \{(1;2);(3;0)\}$. **Chọn (D).**

Bài tập 14 Tìm các số thực x thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} \log_{1+x}(1-2y+y^2)+\log_{1-y}(1+2x+x^2)=4 & (1) \\ \log_{1+x}(1+2y)+\log_{1-y}(1+2x)=2 & (2) \end{cases}$$

(A) $x=-\frac{2}{5}$; **(B)** $x=\frac{2}{5}$; **(C)** $x=0$; **(D)** $x>-\frac{1}{3}$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 1-2y+y^2>0 \\ 1+2x+x^2>0 \\ 0<1+x\neq 1 \\ 0<1-y\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (1-y)^2>0 \\ (1+x)^2>0 \\ 0<1+x\neq 1 \\ 0<1-y\neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-y\neq 0 \\ 1+x\neq 0 \\ -<x\neq 0 \\ 0\neq y<1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ 0\neq y<1 \end{cases}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \log_{x+1}(1-y)^2+\log_{1-y}(1+x)^2=4$

$\Leftrightarrow \log_{1+x}(1-y)+\log_{1-y}(1+x)=2$

Đặt $t=\log_{1+x}(1-y)$. Khi đó phương trình trở thành:

$t+\frac{1}{t}=2 \Leftrightarrow t^2-2t+1=0 \Leftrightarrow (t-1)^2=0 \Leftrightarrow t=1.$

Với $t=1$ thì $\log_{1+x}(1-y)=1 \Leftrightarrow 1-y=1+x \Leftrightarrow y=-x.$

Thay y = -x vào phương trình (2) ta được: $\log_{1+x}(1-2x)+\log_{1+x}(1+2x)=2$

$\Leftrightarrow \log_{1+x}(1-2x)(1+2x)=2$

$\Leftrightarrow 1-4x^2=(1+x)^2 \Leftrightarrow 5x^2+2x=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ x=-\frac{2}{5} \end{array}\right.$.

+ Với x = 0 thì y = 0 (Không thỏa mãn điều kiện)

+ Với $x=-\frac{2}{5}$ thì $y=\frac{2}{5}$ (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(-\frac{2}{5};\frac{2}{5}\right)$. **Chọn (A).**

DẠNG 3. GIẢI HỆ PHƯƠNG TRÌNH MŨ – LOGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP HÀM SỐ

I. PHƯƠNG PHÁP

Xét 1 phương trình hay bất phương trình và sử dụng tính đơn điệu (đồng biến hay nghịch biến) của hàm số để giải quyết bài toán.

II. BÀI TẬP

Tìm số x thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} e^{x-\frac{1}{x}} = e^{y-\frac{1}{y}} & (1) \\ 2y = x^3 + 1 & (2) \end{cases}$

(A) 1; **(B)** $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$; **(C)** $\frac{1-\sqrt{5}}{2}$; **(D)** -1.

Giải:

Điều kiện: $x \neq 0; y \neq 0$.

Xét phương trình (1):

Xét hàm số $f(t) = e^{t-\frac{1}{t}}, t \neq 0$. Ta có: $f'(t) = \left(1 + \frac{1}{t^2}\right)e^{t-\frac{1}{t}} > 0 \ \forall t \neq 0 \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà f(x) = f(y) nên x = y.

Thay x = y vào phương trình (2) ta được:

$$2x = x^3 + 1 \Leftrightarrow (x^3 - x) - (x - 1) = 0 \Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x) - (x - 1) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-1)(x^2 + x - 1) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right. \Rightarrow \left[\begin{array}{l} y = 1 \\ y = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{array}\right.$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $\left\{(1;1); \left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}; \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right); \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}; \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)\right\}$.

Chọn (A).

Lưu ý: Nếu hàm đặc trưng f(t) đơn điệu (đồng biến hay nghịch biến) trên tập D thì $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$.

Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} e^x - e^y = y - x & (1) \\ x^2 + y^2 = 8 & (2) \end{cases}$

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Ta có: $(1) \Leftrightarrow e^x + x = e^y + y$.

Xét hàm số: $f(t) = e^t + t$.

Ta có: $f'(t) = e^t + 1 > 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà f(x) = f(y) nên x = y.

Thay x = y vào phương trình (2) ta được: $2x^2 = 8 \Leftrightarrow x^2 = 4 \Leftrightarrow x = \pm 2 \Rightarrow y = \pm 2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y) \in \{(2;2);(-2;-2)\}$. **Chọn (B).**

[redacted] Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \ln(x+1) + x = \ln(y+1) + y & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$

(A) 3; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+1>0 \\ y+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ y>-1 \end{cases}$.

Xét phương trình (1):

Xét hàm số: f(t) = ln(t + 1) + t với t > -1.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{t+1} + 1 > 0\ \forall t > -1 \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $(-1;+\infty)$

Mà f(x) = f(y) $\Rightarrow$ x = y

Thay x = y vào phương trình (2) ta được: $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = -1\ (L) \\ x = 1 \end{array}\right.$

Với x = 1 thì y = x = 1.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là (x; y) = (1; 1). **Chọn (C).**

[redacted] Có bao nhiêu số thực y thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} e^{\frac{x^3}{3}+x} + \ln\dfrac{x}{y} - e^{\frac{y^3}{3}+y} = 0 & (1) \\ \sqrt{x} + x^4 - 3y^2 - \sqrt{y} = -2 & (2) \end{cases}$?

(A) 3; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: x > 0; y > 0.

Xét phương trình (1):

$(1) \Leftrightarrow e^{\frac{x^3}{3}+x} + \ln x = e^{\frac{y^3}{3}+y} + \ln y$

Xét hàm số: $f(t) = e^{\frac{t^3}{3}+t} + \ln t$ với t > 0.

Ta có: $f'(t) = (t^2+1)e^{\frac{t^3}{3}+t} + \dfrac{1}{t} > 0\ \forall t > 0 \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

Thay x = y vào phương trình (2) ta có:

$$x^4-3x^2+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x^2=1\\x^2=2\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\pm1\\x=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.\Rightarrow\left[\begin{array}{l}y=\pm1\\y=\pm\sqrt{2}\end{array}\right.$$

So sánh với điều kiện, ta suy ra $(x;y)\in\left\{(1;1);\left(\sqrt{2};\sqrt{2}\right)\right\}$ là nghiệm của hệ phương trình.

Chọn (B).

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 5 Có bao nhiêu số thực $x>0$ thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}3^x-3^y=(y-x)(xy+3) & (1)\\ x^2+y^2=3 & (2)\end{cases}$?

(A) 3; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 4.

Giải:

Thay (2) vào (1) ta được: $3^x-3^y=(y-x)\left(xy+x^2+y^2\right)$

$\Leftrightarrow 3^x-3^y=y^3-x^3\Leftrightarrow 3^x+x^3=3^y+y^3$.

Xét hàm số $f(t)=3^t+t^3$. Ta có: $f'(t)=3^t\ln3+3t^2>0\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà f(x) = f(y) nên x = y.

Thay x = y vào phương trình (2) ta được: $2x^2=3\Leftrightarrow x=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\Rightarrow y=\pm\frac{\sqrt{6}}{2}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)\in\left\{\left(\frac{\sqrt{6}}{2};\frac{\sqrt{6}}{2}\right);\left(\frac{-\sqrt{6}}{2};\frac{-\sqrt{6}}{2}\right)\right\}$.

Chọn (C).

Bài tập 6 Tìm số cặp (x; y) thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}3^x+3x=5+y\\ 3^y+3y=5+x\end{cases}$.

(A) 3; **(B)** 2; **(C)** 4; **(D)** 1.

Giải:

Trừ hai phương trình vế theo vế, ta được: $3^x+4x=2^y+4y$.

Xét hàm số: $f(t)=3^t+4t$.

Ta có: $f'(t)=3^t\ln3+4>0\ \forall t\in\mathbb{R}\Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà f(x) = f(y) $\Rightarrow$ x = y.

Thay x = y vào phương trình thứ nhất ta được: $3^x=5-2x\quad(1)$

Xét hàm số: $g(x)=3^x$ và $h(x)=5-2x$. Ta có:

+ g(x) là hàm số đồng biến và h(x) là hàm số nghịch biến.

+ g(1) = h(1)

$\Rightarrow$ x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình (1) $\Rightarrow$ y = x = 1.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: (x; y) = (1; 1).

Chọn (D).

Lưu ý: Xét phương trình f(x) = g(x), trong đó f(x) là hàm số đồng biến (nghịch biến) và g(x) là hàm số nghịch biến (đồng biến) trên D mà $f(x_0) = g(x_0)$ thì x_0 là nghiệm duy nhất của phương trình f(x) = g(x).

Bài tập 7 Có bao nhiêu số thực dương x thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} x^2+3x+\ln(2x+1)=y & (1) \\ y^2+3y+\ln(2y+1)=x & (2) \end{cases}$?

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 2x+1>0 \\ 2y+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-\dfrac{1}{2} \\ y>-\dfrac{1}{2} \end{cases}.$

Trừ vế theo vế phương trình (1) cho phương trình (2) ta được:

$x^2+4x+\ln(2x+1)=x^2+4x+\ln(2x+1).$

Xét hàm số $f(t)=t^2+4t+\ln(2t+1)$ với $t>-\dfrac{1}{2}.$

Ta có: $f'(t)=2t+4+\dfrac{2}{2t+1}>0\ \forall t>-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

Mà f(x) = f(y) nên x = y.

Thay x = y vào (1) ta được: $g(x)=x^2+2x+\ln(2x+1)=0\ \ (3)$

Ta có: $g'(x)=2x+2+\dfrac{2}{2x+1}>0\ \forall x>-\dfrac{1}{2} \Rightarrow$ g(x) là hàm số đồng biến trên $\left(-\dfrac{1}{2};+\infty\right).$

Mà g(0) = 0 nên x = 0 là nghiệm duy nhất của phương trình (3) $\Rightarrow$ y = x = 0 (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là (x; y) = (0; 0). **Chọn (A).**

Bài tập 8 Tìm số cặp số thực (x; y) thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases} \ln(1+x)-\ln(1+y)=x-y & (1) \\ x^2-6xy+9y^2=1 & (2) \end{cases}.$

(A) 3; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 4.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 1+x>0 \\ 1+y>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x>-1 \\ y>-1 \end{cases}.$

Từ (2) $\Rightarrow xy>0.$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \ln(1+x)-x=\ln(1+y)-y \Leftrightarrow f(x)=f(y),$ trong đó:

$f(t)=\ln(1+t)-t,\ t>-1$

Ta có: $f'(t) = \frac{1}{1+t} - 1 = \frac{-t}{1+t} = 0 \Leftrightarrow t = 0.$

Bảng biến thiên:

t	-1		0		$+\infty$
f'((t)		+	0	-	
f(t)		↗	0	↘	

Dựa vào bảng biến thiên và kết hợp với nhận xét $xy > 0$, ta có:

$f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$

Thay $x = y$ vào (2) ta có: $4x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm\frac{1}{2} \Rightarrow y = \pm\frac{1}{2}.$

Vậy tập nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y) \in \left\{\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right);\left(-\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)\right\}.$

Chọn (B).

Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3^x - 3^y = y - x & (1) \\ (x^2 - 3y)\sqrt{2y^2 - 3x + 1} \ge 0 & (2) \end{cases}.$

(A) Vô số; **(B)** 0; **(C)** 1; **(D)** 2.

Giải:

Điều kiện: $2y^2 - 3x + 1 \ge 0.$

Xét phương trình (1):

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 3^x + x = 3^y + y.$

Xét hàm số: $f(t) = 3^t + t$. Ta có: $f'(t) = 3^t \ln 3 + 1 > 0\ \forall t \in \mathbb{R}$ nên f(t) là hàm số đồng biến $\Rightarrow f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y.$

Thay $x = y$ vào (2) ta được: $(x^2 - 3x)\sqrt{2x^2 - 3x + 1} \ge 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x^2 - 3x + 1 = 0 \\ \begin{cases} 2x^2 - 3x + 1 > 0 \\ x^2 - 3x \ge 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1; x = \frac{1}{2} \\ \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x > 1 \\ x < \frac{1}{2} \end{array}\right. \\ \left[\begin{array}{l} x \ge 3 \\ x \le 0 \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x \le \frac{1}{2} \\ x \ge 3 \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $x = y = 1$ hoặc $x = y \le \frac{1}{2}$ hoặc $x = y \ge 3.$

Chọn (A).

Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \log_2 \sqrt{x+3} = 1 + \log_3 y \\ \log_2 \sqrt{y+3} = 1 + \log_3 x \end{cases}$.

(A) 1; (B) 0; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

Khi đó, hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} \log_2(x+3) = 2(1+\log_3 y) \\ 2(1+\log_3 x) = \log_2(y+3) \end{cases}$ (1)

Cộng hai phương trình vế theo vế ta có:

$\log_2(x+3) + 2\log_3 x = 2\log_3 y + \log_2(y+3)$

Xét hàm số: $f(t) = \log_2(t+2) + 2\log_3 t$ với $t > 0$.

+ Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{(t+3)\ln 2} + \dfrac{2}{t\ln 3} > 0\ \forall t > 0 \Rightarrow$ f(t) đồng biến trên $(0;+\infty)$. Mà f(x) = f(y) nên x = y.

Thay x = y vào phương trình thứ nhất của hệ (1) ta có: $\log_2(x+3) = 2(1+\log_3 x)$

$\Leftrightarrow x+3 = 2^{2(1+\log_3 x)} = 4.2^{\log_3 x^2} = 4.2^{\log_3 2.\log_2 x^2} = 4.\left(2^{\log_2 x^2}\right)^{\log_3 2}$

$\Leftrightarrow x+3 = 4.x^{\log_3 4} \Leftrightarrow x^{1-\log_3 4} + 3.x^{-\log_3 4} = 4$ (2)

Xét $g(x) = x^{1-\log_3 4} + 3.x^{-\log_3 4},\ x \in (0;+\infty)$

Ta có: $g'(x) = (1-\log_3 4).x^{-\log_3 4} - 3.\log_3 4.x^{-1-\log_3 4} < 0\ \forall x \in (0;+\infty)$

$\Rightarrow$ g(x) nghịch biến trên $(0;+\infty)$. Mà g(1) = 4 nên x = 1 là nghiệm duy nhất của phương trình (2) $\Rightarrow$ y = 1 (Thỏa mãn)

Vậy (x; y) = (1; 1) là nghiệm của hệ phương trình đã cho. **Chọn (A).**

Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x-y)^2 + (2x-1)^2 = 3y(x-1) + x & (1) \\ \dfrac{x-y}{3} = \ln(x+2) - \ln(y+2) & (2) \end{cases}$

(A) 0; (B) 1; (C) 2; (D) 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x+2 > 0 \\ y+2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > -2 \\ y > -2 \end{cases}$.

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 6x^2 - (5+7y)x + 2y^2 + 3y + 1 = 0$

$\Leftrightarrow (2x-y-1)(3x-2y-1) = 0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y = 2x - 1 \\ y = \dfrac{3x-1}{2} \end{array}\right.$$

+ Nếu $y = 2x - 1$ thì $(x - 1)(y - 1) = (x - 1)(2x - 2) = 2(x-1)^2 \geq 0$

+ Nếu $y = \dfrac{3x-1}{2}$ thì $(x-1)(y-1) = (x-1)\left(\dfrac{3x-1}{2} - 1\right) = (x-1)\left(\dfrac{x-1}{2}\right) = \dfrac{(x-1)^2}{2} \geq 0$

Vậy x, y cùng lớn hơn hoặc cùng nhỏ hơn 1 (3)

$(2) \Leftrightarrow 3\ln(x+2) - x = 3\ln(y+2) - y \Leftrightarrow f(x) = f(y)$, trong đó $f(t) = 3\ln(t + 2) - t$.

Ta có: $f'(t) = \dfrac{3}{t+2} - 1 = \dfrac{1-t}{t+2} = 0 \Leftrightarrow t = 1.$

Bảng biến thiên:

t	-2		1		+∞
f'((t)		+	0	-	
f(t)		$\nearrow$	CĐ	$\searrow$	

Dựa vào bảng biến thiên và nhận xét (3) ta có: $f(x) = f(y) \Leftrightarrow x = y$

+ Nếu $y = 2x - 1$ thì ta có hệ $\begin{cases} x = y \\ y = 2x - 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

+ Nếu $y = \dfrac{3x-1}{2}$ thì ta có hệ $\begin{cases} x = y \\ y = \dfrac{3x-1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là (x; y) = (1; 1). **Chọn (B).**

Bài tập 12 Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} x + \sqrt{x^2+1} = 3^y & (1) \\ y + \sqrt{y^2+1} = 3^x & (2) \end{cases}$

(A) 3; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 1.

Giải:

Chia vế theo vế của phương trình (1) cho (2) ta được:

$$\frac{x+\sqrt{x^2+1}}{y+\sqrt{y^2+1}} = \frac{3^y}{3^x} \Leftrightarrow 3^x\left(x+\sqrt{x^2+1}\right) = 3^y\left(y+\sqrt{y^2+1}\right) \quad (3)$$

Xét hàm số: $f(t) = 3^t\left(t+\sqrt{t^2+1}\right)$.

Ta có: $f'(t) = \left(t+\sqrt{t^2+1}\right).3^t\left(\ln 3 + \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}}\right) > 0\ \forall t \in \mathbb{R} \Rightarrow f(t)$ là hàm đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà f(x) = f(y) (do (3)) $\Rightarrow x = y$.

Thay x = y vào (1) ta có: $x+\sqrt{x^2+1}=3^x \Leftrightarrow 3^x\left(\sqrt{x^2+1}-1\right)=1$.

Xét hàm số: $g(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)$.

Ta có: $g'(x)=3^x\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\ln 3-\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}\right)>0\ \forall x\in\mathbb{R}\Rightarrow$ g(x) là hàm số đồng biến trên $\mathbb{R}$.

Mà g(0) = 1 nên x = 0 là nghiệm duy nhất của phương trình.

Với x = 0 thì y = x = 0.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là (x; y) = (0; 0). **Chọn (D).**

Bài tập 13 Tìm các cặp số (x; y), trong đó $0<x,y<\dfrac{\pi}{4}$ và thỏa mãn hệ phương trình:

$$\begin{cases} e^{x-y}=\dfrac{\sin x}{\sin y} & 1\\ 3\sqrt{8x^2+3}-1=6\sqrt{2y^2-2y+1}-8y & 2\end{cases}$$

(A) $\left(\dfrac{\pi}{8};\dfrac{\pi}{8}\right)$; **(B)** $\left(\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{8}\right)$; **(C)** $\left(\dfrac{\pi}{12};\dfrac{\pi}{12}\right)$; **(D)** $\left(\dfrac{1}{12};\dfrac{1}{12}\right)$.

Giải:

Ta có: $(1)\Leftrightarrow\dfrac{e^x}{\sin x}=\dfrac{e^y}{\sin y}\Leftrightarrow f(x)=f(y)$, trong đó $f(t)=\dfrac{e^t}{\sin t}$, $t\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$.

Hàm f(t) liên tục trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)$ và có: $f'(t)=\dfrac{e^t\cos t(\tan t-1)}{\sin^2 t}<0\ \forall t\in\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow$ f(t) là hàm nghịch biến trên $\left(0;\dfrac{\pi}{4}\right)\Rightarrow f(x)=f(y)\Leftrightarrow x=y$.

Thay x = y vào (2) ta có:

$$3\sqrt{8x^2+3}-1=6\sqrt{2x^2-2x+1}-8x$$

$$\Leftrightarrow 3\left(\sqrt{8x^2+3}-2\sqrt{2x^2-2x+1}\right)+8x-1=0$$

$$\Leftrightarrow \frac{3(8x-1)}{\sqrt{8x^2+3}+2\sqrt{2x^2-2x+1}}+8x-1=0$$

$$\Leftrightarrow (8x-1)\left[\frac{3}{\sqrt{8x^2+3}+2\sqrt{2x^2-2x+1}}+1\right]=0$$

$$\Leftrightarrow 8x-1=0\Leftrightarrow x=\frac{1}{8}\Rightarrow y=\frac{1}{8}\ \text{(Thỏa mãn)}$$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{8};\dfrac{1}{8}\right)$. **Chọn (B).**

Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} 3^{3x-2y} - 5.6^{x} + 4.2^{3x-2y} = 0 & (1) \\ \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + \left(\sqrt{2y} - \sqrt{x}\right)\left(\sqrt{2y} + \sqrt{x}\right)^{2} & (2) \end{cases}$

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \geq 0 \\ x - y \geq 0 \end{cases}$.

Ta có:

$$(2) \Leftrightarrow \sqrt{x-y} = \sqrt{y} + \left(\sqrt{2y} - x\right)\left(\sqrt{2y} + x\right)\left(\sqrt{2y} + x\right) \Leftrightarrow \sqrt{x-y} - \sqrt{y} = (2y - x)\left(\sqrt{2y} + x\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{x - 2y}{\sqrt{x-y} + \sqrt{y}} + (x - 2y)\left(\sqrt{2y} + x\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x - 2y)\left(\frac{1}{\sqrt{x-y} + \sqrt{y}} + \sqrt{2y} + 2\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow x - 2y = 0 \Leftrightarrow x = 2y$$

Với $x = 2y$, thay vào phương trình (1) ta có: $3^{2x} - 5.6^{x} + 4.2^{2x} = 0 \Leftrightarrow \left(\frac{3}{2}\right)^{2x} - 5.\left(\frac{3}{2}\right)^{x} + 4 = 0$

Đặt $t = \left(\frac{3}{2}\right)^{x} > 0$, phương trình trở thành: $t^2 - 5t + 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = 4 \end{array}\right.$.

\+ Với $t = 1$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 1 \Leftrightarrow x = 0 \Rightarrow y = \frac{x}{2} = 0$

\+ Với $t = 4$ thì $\left(\frac{3}{2}\right)^{x} = 4 \Leftrightarrow x = \log_{\frac{3}{2}} 4 = 2\log_{\frac{3}{2}} 2 \Rightarrow y = \frac{x}{2} = \log_{\frac{3}{2}} 2$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y) \in \left\{(0;0); \left(2\log_{\frac{3}{2}} 2; \log_{\frac{3}{2}} 2\right)\right\}$.

Chọn (C).

Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \left(1 + 4^{3x-2y}\right)5^{1-3x+2y} = 1 + 2^{3x-2y+1} & (1) \\ y^3 + 6y - 2x + 4 + \ln\left(y^2 - 2y + 2x\right) = 0 & (2) \end{cases}$

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $y^2 - 2y + 2x > 0$.

Xét phương trình (1):

Đặt $t = 3x - 2y$. Khi đó (1) trở thành: $5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^{t} + \left(\frac{4}{5}\right)^{t}\right] = 1 + 2.2^{t}$ (3)

Ta thấy:

+ $f(t)=5\left[\left(\frac{1}{5}\right)^t+\left(\frac{4}{5}\right)^t\right]$ là hàm nghịch biến và $g(t)=1+2.2^t$ là hàm nghịch biến.

+ f(1) = g(1)

$\Rightarrow$ t = 1 là nghiệm duy nhất của (3) $\Rightarrow 2x-3y=1 \quad (4)$

Thay (4) vào phương trình (2) ta được: $y^3+2y+3+\ln(y^2+y+1)=0 \quad (5)$

Xét hàm số: $f(y)=y^3+2y+3+\ln(y^2+y+1)$, ta có:

+ $f'(y)=3y^2+2+\frac{2y+1}{y^2+y+1}=3y^2+\frac{2y^2+4y+3}{y^2+y+1}>0 \Rightarrow$ f(y) làm hàm đồng biến.

+ Mà f(-1) = 0 nên (5) có nghiệm duy nhất y = -1.

Thay y = -1 vào (4) $\Rightarrow$ x = -1 (Thỏa mãn điều kiện)

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: (x; y) = (-1; -1).

Chọn (B).

Bài tập 16 Tìm các số x thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}\log_2(1+2\cos x)=\log_2(\sin y)+2\\ \log_2(1+2\sin y)=\log_2(\cos x)+2\end{cases}$.

(A) $\frac{\pi}{6}+k2\pi$; **(B)** $\frac{5\pi}{6}+k2\pi$; **(C)** $\frac{\pi}{3}+k2\pi$; **(D)** $-\frac{\pi}{6}+k2\pi$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}\cos x>0\\ \sin y>0\end{cases}$.

Đặt $\begin{cases}u=\cos x\\ v=\sin y\end{cases}$, ta có hệ: $\begin{cases}\log_2(1+2u)=\log_2 v+2\\ \log_2(1+2v)=\log_2 u+2\end{cases} \quad (1)$

Trừ hai vế ta được:

$\log_2(1+2u)+\log_2 u=\log_2(1+2v)+\log_2 v$

Xét hàm số: $f(t)=\log_2(1+2t)+\log_2 t,\ t>0$

Ta có: $f'(t)=\frac{2}{(1+2t)\ln 2}+\frac{1}{t\ln 2}>0\ \forall t>0 \Rightarrow$ f(t) là hàm số đồng biến trên $(0;+\infty)$

$\Rightarrow f(u)=f(v)\Leftrightarrow u=v$

Thay u = v vào hệ (1) ta có:

$\log_2(1+2u)-\log_2 u=2\Leftrightarrow \log_2\frac{1+2u}{u}=2\Leftrightarrow\frac{1+2u}{u}=4\Leftrightarrow u=\frac{1}{2}\Rightarrow v=\frac{1}{2}$(thỏa mãn)

Vậy hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases}\sin y=\frac{1}{2}\\ \cos x=\frac{1}{2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}y=\frac{\pi}{6}+k2\pi\\ y=\frac{5\pi}{6}+k2\pi\end{array}\right.\\ x=\pm\frac{\pi}{3}+k2\pi\end{cases}$.

Chọn (C).

Bài tập 17 Tìm các số x, y thỏa mãn hệ phương trình: $\begin{cases}\dfrac{1+x}{1-y}=e^{\cos x-\cos y}\\ y=\sqrt{2x-x^2}-1\end{cases}$.

(A) $(x;y)=\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\right)$; **(B)** $(x;y)=\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$;

(C) $(x;y)=\left(\dfrac{2-\sqrt{2}}{2};\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\right)$; **(D)** $(x;y)=\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases}1-y\neq 0\\ 2x-x^2\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}y\neq 1\\ 0\leq x\leq 2\end{cases}$.

Đặt z = -y thì hệ đã cho trở thành: $\begin{cases}\dfrac{1+x}{1+z}=e^{\cos x-\cos z} & (1)\\ z=1-\sqrt{2x-x^2} & (2)\end{cases}$

$(2)\Leftrightarrow z=1-\sqrt{1-(x-1)^2}\geq 0$

Vì $\begin{cases}0\leq x\leq 2\\ 0\leq z\leq 1\end{cases}$ nên cả 2 vế của phương trình (1) đều dương nên lấy logarit nepe hai vế ta được:

$\ln(1+x)-\cos x=\ln(1+z)-\cos z$

Xét hàm số: $f(t)=\ln(1+t)-\cos t,\ t\in[0;2]$

Ta có: $f'(t)=\dfrac{1}{1+t}+\sin t>0\ \forall t\in[0;2]\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên [0; 2]

$\Rightarrow f(x)=f(z)\Leftrightarrow x=z$

Thế x = z vào (2) ta được: $x=1-\sqrt{2x-x^2}\Leftrightarrow 1-x=\sqrt{2x-x^2}\Leftrightarrow\begin{cases}1-x\geq 0\\ (1-x)^2=2x-x^2\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 1\\ x^2-2x+1=2x-x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ 2x^2-4x+1=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq -1\\ x=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}\end{cases}$

So sánh với điều kiện $\Rightarrow x=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow z=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\Rightarrow y=\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}$

Vậy nghiệm của hệ phương trình là: $(x;y)=\left(\dfrac{2+\sqrt{2}}{2};\dfrac{-2-\sqrt{2}}{2}\right)$.

Chọn (D).

Bài tập 18 Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases}x+\sqrt{x^2-2x+2}=3^{y-1}+1 & (1)\\ y+\sqrt{y^2-2y+2}=3^{x-1}+1 & (2)\end{cases}$

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Trừ vế theo vế phương trình (1) cho (2) ta được:

$x+\sqrt{x^2-2x+2}+3^{x-1}=y+\sqrt{y^2-2y+2}+3^{y-1}$ (3)

Xét hàm số $f(t)=t+\sqrt{t^2-2t+2}+3^{t-1}$.

Ta có: $f'(t)=1+\dfrac{t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}+3^{t-1}.\ln 3=\dfrac{\sqrt{t^2-2t+2}+t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}+3^{t-1}.\ln 3$

$=\dfrac{\sqrt{(t-1)^2+1}+t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}+3^{t-1}.\ln 3>\dfrac{|t-1|+t-1}{\sqrt{t^2-2t+2}}+3^{t-1}.\ln 3>0$ (Do $|t-1|+t-1\ge 0$)

$\Rightarrow$ f(t) đồng biến trên $\mathbb{R}$. Mà f(x) = f(y) (do (3)) nên x = y.

Thay x = y vào (1) ta có: $x+\sqrt{x^2-2x+2}-1=3^{x-1}$

$\Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}-1\right)=(x-1)\ln 3$

$\Leftrightarrow \ln\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}-1\right)-(x-1)\ln 3=0$

Xét hàm số: $g(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2-2x+2}-1\right)-(x-1)\ln 3$

Ta có: $g'(x)=\dfrac{1+\dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-2x+2}}}{x+\sqrt{x^2-2x+2}-1}-\ln 3=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-2x+2}}-\ln 3$

$=\dfrac{1}{\sqrt{(x-1)^2+1}}-\ln 3\le 1-\ln 3<0\Rightarrow$ g(x) là hàm số nghịch biến.

Mà g(1) = 0 nên x = 1 là nghiệm duy nhất.

Với x = 1 thì y = x = 1.

Vậy nghiệm của hệ đã cho là: (x; y) = (1; 1).

Chọn (B).

Bài tập 19 Tìm tất cả các giá trị thực của tham số m để hệ bất phương trình sau có nghiệm:

$$\begin{cases}5^{2x+\sqrt{x+1}}-5^{2+\sqrt{x+1}}+2017x<2017 & (1)\\ x^2-(m+2)x+2m+3\ge 0 & (2)\end{cases}$$

(A) $m=-2$; **(B)** $m=2$; **(C)** $-2\le m\le 2$; **(D)** $m\ge -2$.

Giải:

Điều kiện: x > -1.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 5^{2x+\sqrt{x+1}}-5^{2+\sqrt{x+1}}\le 2017(1-x)$.

+ Xét x > 1, ta có: $\begin{cases}2x>2\\1-x<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\sqrt{x+1}>2+\sqrt{x+1}\\1-x<0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5^{2x+\sqrt{x+1}}-5^{2+\sqrt{x+1}}>0\\1-x<0\end{cases}$

$\Rightarrow$ Với x > 1 thì bất phương trình vô nghiệm.

+ Xét $-1\le x\le 1$, ta có: $\begin{cases}2x\le 2\\1-x\ge 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+\sqrt{x+1}\le 2+\sqrt{x+1}\\1-x\ge 0\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}5^{2x+\sqrt{x+1}}-5^{2+\sqrt{x+1}}\le 0\\1-x\ge 0\end{cases}$

$\Rightarrow$ với $x \in [-1;1]$ bất phương trình (1) luôn đúng.

$\Rightarrow -1 \le x \le 1$ là nghiệm của bất phương trình (1).

Ta cần xác định m để bất phương trình (2) có nghiệm $x \in [-1;1]$.

$(2) \Leftrightarrow (x-2)m \le x^2 - 2x + 3 \Leftrightarrow m \ge \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}$ (do $x - 2 < 0\ \forall x \in [-1;1]$)

Xét hàm số: $f(x) = \dfrac{x^2 - 2x + 3}{x - 2}, x \in [-1;1]$

Ta có: $f'(x) = \dfrac{x^2 - 4x + 1}{(x-2)^2} = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 2 - \sqrt{3} \\ x = 2 + \sqrt{3}\quad (L) \end{array}\right.$

Bảng biến thiên:

x	-1		$2 - \sqrt{3}$		1
f'(x)		+	0	-	
f(x)	-2	$\nearrow$	$2 + \sqrt{3}$	$\searrow$	2

Từ bảng biến thiên ta thấy yêu cầu bài toán $\Leftrightarrow m \ge -2$.

Chọn (D).

DẠNG 4. GIẢI HỆ MŨ – LÔGARIT BẰNG PHƯƠNG PHÁP ĐÁNH GIÁ – BẤT ĐẲNG THỨC

I. PHƯƠNG PHÁP

Thông thường ta sẽ chọn 1 phương trình hay bất phương trình để thực hiện các phép biến đổi và sử dụng các phương pháp đánh giá sau đó kết hợp với phương trình hay bất phương trình còn lại để giải.

II. BÀI TẬP

A. Khởi động

Bài 1. Tìm tập nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} x^2+5x+4\le 0 & (1) \\ (2+x).3^x<1 & (2) \end{cases}$

(A) (-4; -1); **(B)** $\{-4;-1\}$; **(C)** $[-4;-1]$; **(D)** $[-2;-1]$.

Giải:

Ta có: $(1)\Leftrightarrow -4\le x\le -1$.

$(2)\Leftrightarrow x+2<\left(\frac{1}{3}\right)^x$.

Xét hàm số: $f(x)=x+2$ trên [-4; -1]

Ta có: $f'(x)=1>0\Rightarrow$ f(x) đồng biến trên [-4; -1]

$\Rightarrow \underset{x\in[-4;-1]}{\text{Max}} f(x)=f(-1)=1$.

Xét hàm số: $g(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x$ trên [-4; -1]

Ta có: $g'(x)=\left(\frac{1}{3}\right)^x\ln\frac{1}{3}<0\Rightarrow$ g(x) nghịch biến trên [-4; -1]

$\Rightarrow \text{Min} g(x)=g(-1)=3$

Ta thấy: $\text{Max} f(x)=1<\text{Min} g(x)=3\ \ \forall x\in[-4;-1]$ nên g(x) > f(x) luôn đúng với $\forall x\in[-4;-1]$.

Vậy tập nghiệm của hệ bất phương trình là: [-4; -1].

Chọn (C).

Bài tập 2 Nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} 4^{x+y-1}+27.4^{2y-1}\le 6 & (1) \\ x+3y\ge 2-\log_4 3 & (2) \end{cases}$ là:

(A) $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2}+2\log_4 3;\dfrac{1}{2}-\log_4 3\right)$; **(B)** $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2}-2\log_4 3;\dfrac{1}{2}+\log_4 3\right)$;

(C) $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2}-2\log_4 3;\dfrac{1}{2}-\log_4 3\right)$; **(D)** $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2}+2\log_4 3;\dfrac{1}{2}+\log_4 3\right)$.

Giải:

Ta có: $(2)\Leftrightarrow x+3y-2\ge -\log_4 3=\log_4\dfrac{1}{3}$.

Xét bất phương trình (1):

Theo bất đẳng thức Cô-Si ta có:

$$4^{x+y-1}+27.4^{2y-1}\ge 2\sqrt{4^{x+y-1}.27.4^{2y-1}}=2\sqrt{27.4^{x+3y-1}}\ge 2\sqrt{27.4^{\log_4\frac{1}{3}}}=6$$

Do đó, bất phương trình (1) $\Leftrightarrow 4^{x+y-1}=27.4^{2y-1}=3\Leftrightarrow\begin{cases}4^{x+y-1}=3\\27.4^{2y-1}=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x+y-1=\log_4 3\\4^{2y-1}=\dfrac{1}{9}\end{cases}$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x+y=1+\log_4 3\\2y-1=\log_4\dfrac{1}{9}=-\log_4 9\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=\dfrac{1}{2}+\log_4 3+\dfrac{1}{2}\log_4 9=\dfrac{1}{2}+2\log_4 3\\y=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}\log_4 9=\dfrac{1}{2}-\log_4 3\end{cases}$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là: $(x;y)=\left(\dfrac{1}{2}+2\log_4 3;\dfrac{1}{2}-\log_4 3\right)$

Chọn (A).

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 1 Tìm số nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases}6^{-(y+4)}=2^{|x^2-2x-3|-\log_2 6} & (1)\\4|y|-|y-1|+(y-3)^2\le 8 & (2)\end{cases}$

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 6^{-(y+4)}=2^{|x^2-2x-3|-\log_2 6}\ge 2^{-\log_2 6}=6^{-1}$

$\Leftrightarrow -(y+4)\ge -1\Leftrightarrow y\le -3 \quad (3)$

Từ (2) và (3) ta có: $\begin{cases}y\le -3\\-4y+y-1+(y-3)^2\le 8\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}y\le -3\\-3\le y\le 0\end{cases}\Leftrightarrow y=-3.$

Thay y = -3 vào (1) ta được: $(1)\Leftrightarrow 2^{|x^2-2x-3|-\log_2 6}=6^{-1}$

$$\Leftrightarrow \left|x^2-2x-3\right|-\log_2 6=\log_2 6^{-1} \Leftrightarrow \left|x^2-2x-3\right|=0 \Leftrightarrow x^2-2x-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-1 \\ x=3 \end{array}\right..$$

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là: $(x;y)\in\{(-1;-3);(3;-3)\}$.

Chọn (B).

Bài tập 4 Tìm số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} 4^y+2^{x+y}=2^{2x+1} & (1) \\ \log_5\left(x^2+3y+1\right)-\log_5 y=-2x^2+4y-1 & (2) \end{cases}$$

(A) 1; **(B)** 0; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $y>0$.

Ta có: $(1)\Leftrightarrow 2^{2y}+2^{x+y}-2.2^{2x}=0 \Leftrightarrow 2^{2(y-x)}+2^{y-x}-2=0$

Đặt $t=2^{y-x}>0$, ta có phương trình: $t^2+t-2=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=1 \\ t=-2 \quad (L) \end{array}\right.$

Với $t=1$ thì $2^{y-x}=1 \Leftrightarrow y-x=0 \Leftrightarrow y=x$. Vì $y>0$ nên $x>0$.

Thay $y=x$ vào (2) ta có: $\log_5\left(x^2+3x+1\right)-\log_5 x=-2x^2+4x-1$

$$\Leftrightarrow \log_5\frac{x^2+3x+1}{x}=-2\left(x^2-2x+1\right)+1$$

$$\Leftrightarrow \log_5\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=-2(x-1)^2+1 \qquad (3)$$

Với $x>0$ theo bất đẳng thức Cô-Si ta có:

$$x+\frac{1}{x}\ge 2 \Leftrightarrow x+\frac{1}{x}+3\ge 2+3=5 \Rightarrow \log_5\left(x+\frac{1}{x}+3\right)\ge \log_5 5=1$$

Mà $-2(x-1)^2+1\le 1$ nên $(3)\Leftrightarrow \begin{cases} \log_5\left(x+\frac{1}{x}+3\right)=1 \\ -2(x-1)^2+1=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=1 \Rightarrow y=1$

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)=(1;1)$. Do đó **Chọn** (A).

C. Tăng tốc

Bài tập 5 Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} e^x-e^y=\left(\log_3 y-\log_3 x\right)(xy+1) & (1) \\ x^2+y^2=4 & (2) \end{cases}$

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $x>0, y>0$.

Từ điều kiện $\Rightarrow xy>0 \Rightarrow xy+1>0$

Xét phương trình (1):

+ Nếu $x > y$ thì $\begin{cases} e^x > e^y \\ \log_3 y < \log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^y > 0 \\ \log_3 x - \log_3 y < 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vế trái > 0 và vế phải < 0 $\Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

+ Nếu $x < y$ thì $\begin{cases} e^x < e^y \\ \log_3 y > \log_3 x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - e^y < 0 \\ \log_3 x - \log_3 y > 0 \end{cases} \Rightarrow$ Vế trái < 0 và vế phải > 0 $\Rightarrow (1)$ vô nghiệm.

Do đó, $x = y$.

Thay $x = y$ vào (2) ta có: $2x^2 = 4 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -\sqrt{2} & (L) \\ x = \sqrt{2} & \end{array}\right.$

Với $x = \sqrt{2} \Rightarrow y = \sqrt{2}$ (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x;y) = (\sqrt{2};\sqrt{2})$. **Chọn (C).**

Bài tập 6 Tìm số nghiệm của hệ phương trình: $\begin{cases} \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y - \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x = (y-x)(x^2 - xy + y^2) & (1) \\ x^2 + y^2 = 2 & (2) \end{cases}$

(A) 0; **(B)** 3; **(C)** 2; **(D)** 1.

Giải:

Điều kiện: $x > 0; y > 0$.

Xét phương trình (1):

Ta có: $x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 > 0\ \forall x, y > 0$

+ Nếu $x > y$ thì $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x < \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y \Rightarrow$ Vế trái > 0 và vế phải < 0 $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

+ Nếu $x < y$ thì $\log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} x > \log_{\frac{\sqrt{3}}{3}} y \Rightarrow$ Vế trái < 0 và vế phải > 0 $\Rightarrow$ phương trình vô nghiệm.

Do đó, $x = y$.

Thay $x = y$ vào phương trình (2) ta được: $2x^2 = 2 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} x = -1 & (L) \\ x = 1 & \end{array}\right.$

Với $x = 1$ thì $y = 1$ (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x; y) = (1; 1)$. **Chọn (D).**

D. Về đích

Bài tập 7 Số nghiệm của hệ bất phương trình $\begin{cases} \sqrt{3^{x+y}} + \sqrt{1 - 3^y} \le \sqrt{3^y} & (1) \\ 3\sqrt{3^{x+y} - 3^y} + \sqrt{3^y} = 1 & (2) \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} 1 - 3^y \ge 0 \\ 3^{x+y} - 3^y \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^y \le 1 \\ 3^y(3^x - 1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^y \le 1 \\ 3^x \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \le 0 \\ x \ge 0 \end{cases}$ (3)

Xét bất phương trình (1):

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{3^x} + \sqrt{\dfrac{1-3^y}{3^y}} \le 1$. Mà theo (3) thì $\begin{cases} \sqrt{3^x} \ge 1 \\ \sqrt{\dfrac{1-3^y}{3^y}} \ge 0 \end{cases}$ nên $\sqrt{3^x} + \sqrt{\dfrac{1-3^y}{3^y}} \ge 1$.

Do đó, $(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3^x} = 1 \\ \sqrt{\dfrac{1-3^y}{3^y}} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3^x = 1 \\ 3^y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x = y = 0$

Thay $x = y = 0$ vào phương trình (2) thấy thỏa mãn.

Vậy nghiệm của hệ bất phương trình đã cho là: $(x; y) = (0; 0)$. **Chọn (B).**

Bài tập Tìm số nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases} \sqrt{y^2+1} + \log_3(2x-y) = 4xy - 4x^2 + \sqrt{4x^2 - 4xy + y^2 + 1} + \log_3 y & (1) \\ \sqrt{y^2+5} = x^2 - \sqrt{x-1} & (2) \end{cases}$$

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Điều kiện: $\begin{cases} y > 0 \\ 2x - y > 0. \\ x \ge 1 \end{cases}$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \sqrt{y^2+1} - y^2 - \log_3 y = \sqrt{(2x-y)^2+1} - (2x-y)^2 - \log_3(2x-y)$ (3)

Xét hàm số: $f(t) = \sqrt{t^2+1} - t^2 - \log_3 t, \quad t > 0.$

Ta có: $f'(t) = \dfrac{1}{\sqrt{t^2+1}} - 2t - \dfrac{1}{t}.$

Theo bất đẳng thức Cô–Si ta có: $2t + \dfrac{1}{t} \ge 2\sqrt{2} \Rightarrow f'(t) < 1 - 2\sqrt{2} < 0 \Rightarrow$ f(t) nghịch biến trên $(0; +\infty)$

Mà f(y) = f(2x - y) (Theo (3)) nên $y = 2x - y \Leftrightarrow x = y$.

Thay x = y vào phương trình (2) ta có: $\sqrt{x^2+5} = x^2 - \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+5} - 3 = x^2 - 4 + 1 - \sqrt{x-1}$

$\Leftrightarrow (x-2)\left(\dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - (x+2) + \dfrac{1}{1+\sqrt{x-1}} \right) = 0$ (4)

Với điều kiện $x \ge 1$ thì $\begin{cases} \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}} < 1 \\ \dfrac{1}{1+\sqrt{x-1}} < 1 \Rightarrow \dfrac{x+2}{\sqrt{x^2+5}+3} - (x+2) + \dfrac{1}{1+\sqrt{x-1}} < 0 \\ x + 2 \ge 3 \end{cases}$

$\Rightarrow$ x = 2 là nghiệm duy nhất của (4)

Với x = 2 thì y = 2 (Thỏa mãn)

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(x; y) = (2; 2)$. Do đó **Chọn** (A).

Positano

Italy là nơi có rất nhiều điểm đến đẹp, và **Positano** là một trong số ấy. Thị trấn nhỏ nằm sườn đồi thơ mộng nhìn ra vùng biển Amalfi. Nơi này được nhiều du khách nhận xét là chốn thần tiên, và là nơi nhất định phải ghé thăm khi đến châu Âu

CHUYÊN ĐỀ 2

SỐ PHỨC

VẤN ĐỀ 1:

SỐ PHỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Khái niệm số phức

Định nghĩa 1: Một số phức là một biểu thức dạng a + bi, trong đó a và b là những số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$. Kí hiệu số phức đó là z và viết z = a + bi.

i được gọi là đơn vị ảo, a được gọi là *phần thực* và b được gọi là *phần ảo* của số phức $z = a + bi$.

Tập hợp các số phức được kí hiệu là $\mathbb{C}$.

Chú ý:

Số phức z = a + 0i có phần ảo bằng 0 được coi là số thực và viết là $a + 0i = a \in \mathbb{R}$.

Số phức có phần thực bằng 0 được gọi là *số ảo* (còn gọi là *số thuần ảo*): z = 0 + bi = bi $(b \in \mathbb{R})$; $i = 0 + 1i = 1i$.

Số 0 = 0 + 0i = 0i vừa là số thực vừa là số ảo.

Ví dụ: Số phức $z = 3 + \sqrt{2}i$ có phần thực bằng 3, phần ảo bằng $\sqrt{2}$.

Số phức $z = -2i$ có phần thực bằng 0, phần ảo bằng -2; đó là một số ảo.

Định nghĩa 2: Hai số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$, $z' = a' + b'i\,(a', b' \in \mathbb{R})$ gọi là bằng nhau nếu $a = a', b = b'$.

Khi đó ta viết: $z = z'$.

2. Biểu diễn hình học của số phức

Xét mặt phẳng tọa độ Oxy. Mỗi số phức $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$ được biểu diễn bởi điểm M(a; b). Ngược lại, mỗi điểm M(a; b) biểu diễn một số phức là z = a + bi. Ta còn viết M(a + bi) hay M(z).

Mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức được gọi là *mặt phẳng phức.*

Gốc tọa độ O biểu diễn số 0.

Các điểm trên trục hoành Ox biểu diễn các số thực, do đó trục Ox còn được gọi là *trục thực.*

Các điểm trên trục tung Oy biểu diễn các số ảo, do đó trục Oy còn được gọi là *trục ảo.*

3. Phép cộng và phép trừ số phức

3.1. Tổng của hai số phức

Định nghĩa 3: Tổng của hai số phức $z = a + bi$, $z' = a' + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức $z + z' = a + a' + (b + b')i$.

Ví dụ 2: Ta có: $(5 + i) + (3 - 2i) = (5 + 3) + (i - 2i) = 8 - i$

$$(2 + 6i) + (4 - 6i) = (2 + 4) + (6i - 6i) = 6$$

$$(3 + 2i) + (-3 + 3i) = (3 - 3) + (2i + 3i) = 5i.$$

3.2. Tính chất của phép cộng số phức

i) Tính chất kết hợp:

$(z + z') + z'' = z + (z' + z'')\ \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}.$

ii) Tính chất giao hoán:

$z + z' = z' + z \forall z, z' \in \mathbb{C}.$

iii) Cộng với 0:

$z + 0 = 0 + z \forall z \in \mathbb{C}.$

iv) Với mỗi số phức $z = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$, nếu kí hiệu số phức $-a - bi$ là $-z$ thì ta có $z + (-z) = (-z) + z = 0$

Số $-z$ được gọi là số đối của số phức z.

3.3. Phép trừ hai số phức

Định nghĩa 4: Hiệu của hai số phức z và z' là tổng của z và $-z'$, tức là

$z - z' = z + (-z')$

Nếu $z = a + bi, z' = a' + b'i$ thì $z - z' = a - a' + (b - b')i.$

Ví dụ 3: $(3 + 4i) - (5 - 2i) = (3 - 5) + [4 - (-2)]i = -2 + 6i.$

4. Phép nhân số phức

4.1. Tích của hai số phức

Định nghĩa 5: Tích của hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a + b'i$ $(a, b, a', b' \in \mathbb{R})$ là số phức

$zz' = aa' - bb' + (ab' + a'b)i.$

Ví dụ 4: $(3 + i)(5 - 2i) = (15 + 2) + (-6 + 5)i = 17 - i.$

4.2. Tính chất của phép nhân số phức

i) Tính chất giao hoán

$zz' = z'z \ \forall z, z' \in \mathbb{C}.$

ii) Tính chất kết hợp

$(zz')z'' = z(z'z'') \ \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}.$

iii) Nhân với 1

$1.z = z.1 = z \ \forall z \in \mathbb{C}.$

iv) Tính chất phân phối của phép nhân đối với phép cộng

$z(z + z') = zz' + zz'' \ \forall z, z', z'' \in \mathbb{C}.$

5. Số phức liên hợp và môđun của số phức

5.1. Số phức liên hợp

a) Định nghĩa 6: Số phức liên hợp của $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ là $a - bi$ và được kí hiệu là $\overline{z}$.

Như vậy $\overline{z} = \overline{a + bi} = a - bi.$

Ví dụ $\overline{5 + 6i} = 5 - 6i$

$\overline{2 - \sqrt{3}i} = 2 + \sqrt{3}i$

$\overline{i} = -i$

$\overline{-2i} = 2i.$

Chú ý: Vì $\overline{\overline{z}} = z$ nên z và $\overline{z}$ là hai số phức liên hợp với nhau.

b) Tính chất

Với mọi số phức z, z' ta có:

$\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$

$\overline{zz'} = \overline{z}.\overline{z'}$

$z\overline{z} = a^2 + b^2, \ (z = a + bi).$

5.2. Môđun của số phức

Định nghĩa 7: Môđun của số phức $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ là số thực không âm $\sqrt{a^2 + b^2}$ và được kí hiệu là $|z|$.

Như vậy: Nếu $z = a + bi \ (a, b \in \mathbb{R})$ thì $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}.$

Ví dụ $|-i| = 1; \ |4 + 3i| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5.$

5.3. Phép chia cho số phức khác 0

Định nghĩa 8: Số nghịch đảo của số phức z khác 0 là số $z^{-1} = \dfrac{1}{|z|^2}\overline{z}.$

Thương $\frac{z'}{z}$ của phép chia số phức z' cho số phức z khác 0 là tích của z' với nghịch đảo của số phức z, tức là $\frac{z'}{z} = z'z^{-1}$.

Như vậy, nếu $z \neq 0$ thì $\frac{z'}{z} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2}$.

Ví dụ 8: $\frac{2-i}{5+4i} = \frac{(2-i)(5-4i)}{(5+4i)(5-4i)} = \frac{6-13i}{41}$.

II. BÀI TẬP

A. Khởi động

Bài tập 1: Số nào vừa là số thực, vừa là số ảo?

(A) 0; **(B)** 1; **(D)** 0 và 1; **(D)** Không có số nào.

Giải:

Ta có: 0 = 0 + 0i nên 0 vừa là số thực, vừa là số ảo $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 2: Trong các kết luận sau, kết luận nào là SAI?

(A) Môđun của số phức z là một số thực.

(B) Môđun của số phức z là một số phức.

(C) Môđun của số phức z là một số thực dương.

(D) Môđun của số phức z là một số thực không âm.

Giải:

Giả sử $z = a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow$ Các khẳng định (A), (C), (D) đúng; (B) sai $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 3: Số nào trong các số sau là số thực?

(A) $\left(\sqrt{2}+3i\right)-\left(\sqrt{2}-3i\right)$; **(B)** $\left(3+i\sqrt{6}\right)+\left(3-i\sqrt{6}\right)$;

(C) $\left(1+i\sqrt{2}\right)^2$; **(D)** $\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}$.

Giải:

Ta có: $\left(\sqrt{2}+3i\right)-\left(\sqrt{2}-3i\right) = \left(\sqrt{2}-\sqrt{2}\right)+(3i+3i) = 0+6i = 6i$ là số ảo.

$\left(3+i\sqrt{6}\right)+\left(3-i\sqrt{6}\right) = (3+3)+\left(i\sqrt{6}-i\sqrt{6}\right) = 6+0 = 6$ là số thực.

$\left(1+i\sqrt{2}\right)^2 = 1+2i\sqrt{2}+\left(i\sqrt{2}\right)^2 = -1+2i\sqrt{2}$ là số ảo.

$\frac{\sqrt{3}-i}{\sqrt{3}+i}=\frac{\left(\sqrt{3}-i\right)^2}{\left(\sqrt{3}+i\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{3-i^2}=\frac{2-2\sqrt{3}i}{4}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ không là số thực.

Chọn (B).

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Thao tác:

Bước 1: Nhấn: Mode 2 (để chuyển sang chế độ CMPLX)

Bước 2: Nhập biểu thức phức và nhấn bằng.

Chú ý số i trên màn hình máy tính nằm ở phím EGN (trên số 8)

Thực hiện các phép tính nhân chia bình thường.

Ví dụ: Nhập biểu thức và nhấn bằng CMPLX Math $(\sqrt{2}+3i)-(\sqrt{2}-3i)$ ta được kết quả ở biểu

$6i$

thức A bằng 6i. Làm hoàn toàn tương tự cho các biểu thức ở đáp án B, C, D.

Lưu ý: Số phức $z = a + bi$ là số thực khi $b = 0$, là số ảo khi $a = 0$. Số $0 = 0 + 0i = 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo.

Bài tập 4. Số nào trong các số sau là số thuần ảo?

(A) $\left(\sqrt{3}+2i\right)+\left(\sqrt{3}-2i\right)$; **(B)** $\left(\sqrt{3}+2i\right).\left(\sqrt{3}-2i\right)$;

(C) $(3+3i)^2$; **(D)** $\frac{3+2i}{3-2i}$.

Giải:

Ta có: $\left(\sqrt{3}+2i\right)+\left(\sqrt{3}-2i\right)=\left(\sqrt{3}+\sqrt{3}\right)+(2i-2i)=2\sqrt{3}$ là số thực.

$\left(\sqrt{3}+2i\right).\left(\sqrt{3}-2i\right)=\left(\sqrt{3}\right)^2-(2i)^2=3+4=7$ là số thực.

$(3+3i)^2=9+12i+(3i)^2=9+12i-9=12i$ là số thuần ảo.

$\frac{3+2i}{3-2i}=\frac{(3+2i)^2}{(3-2i)(3+2i)}=\frac{9+12i+(2i)^2}{9-4i^2}=\frac{5+12i}{13}$ không là số thuần ảo.

Chọn (C).

Lưu ý: Có thể sử dụng máy tính CASIO để tính các biểu thức trên.

Bài tập 5. Cho số phức $z=2+4i+2i(1-3i)$. Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG về số phức z trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(a) Phần thực của z là 6.

(b) Phần ảo của z là 6.

(c) Số phức liên hợp của z là 8 – 6i.

(d) Môđun của z là 100.

Giải:

Ta có: $z = 2 + 4i + 2i - 6i^2 = 2 + 6i + 6 = 8 + 6i$.

Phần thực của z là: 8; phần ảo của z là 6 $\Rightarrow$ (a) sai, (b) đúng.

Số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = \overline{8 + 6i} = 8 - 6i \Rightarrow$ (c) đúng.

Môđun của z là: $|z| = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10 \Rightarrow$ (d) sai.

Vậy có tất cả 2 khẳng định đúng.

Chọn (B).

Chú ý:

1. Với số phức $z = a + bi, (a, b \in \mathbb{R})$ thì:

- Phần thực bằng a, phần ảo bằng b.
- Số phức liên hợp của z là $\overline{z} = a - bi$.
- Môđun của z là $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2. Có thể sử dụng máy tính CASIO để tính các biểu thức trên.

Bài tập 6 Cho số phức $z = (3 - 2i)^2 + (2 + i)^3$. Có bao nhiêu khẳng định SAI trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(a) Phần thực của z là 7.

(b) Phần ảo của z là -1.

(c) Số phức liên hợp của z là -7 – i.

(d) Môđun của z là $5\sqrt{2}$.

Giải:

Ta có: $z = 9 - 12i + 4i^2 + 8 + 12i + 6i^2 + i^3 = 17 - 6 - 4 - i = 7 - i$.

Phần thực của z là 7; phần ảo của z là -1 $\Rightarrow$ (a), (b) đúng.

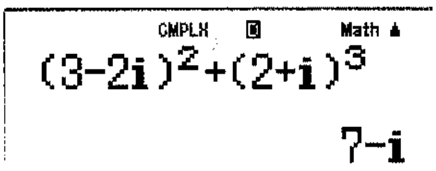
Số phức liên hợp của z là: $\overline{z} = \overline{7 - i} = 7 + i \Rightarrow$ (c) sai.

Môđun của z là: $|z| = |7 - i| = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2} \Rightarrow$ (d) đúng.

Vậy có đúng 1 khẳng định sai.

Chọn (A).

Nhận xét: Có thể sử dụng máy tính nhập biểu thức số phức và nhấn bằng ta được kết quả $z = 7 - i$



Bài tập 7 Số $z+\overline{z}$ là

(A) Số ảo; **(B)** Số thực; **(C)** 0; **(D)** 2.

Giải:

Giả sử z = a + bi, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overline{z} = a - bi$.

Ta có: $z+\overline{z} = (a+bi)+(a-bi) = (a+a)+(bi-bi) = 2a$ là số thực.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 8 Số $z-\overline{z}$ với z không là số thuần thực là

(A) Số ảo; **(B)** Số thực; **(C)** 0; **(D)** 2i.

Giải:

Giả sử z = a + bi, trong đó $a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0$. Khi đó $\overline{z} = a - bi$.

Ta có: $z-\overline{z} = (a+bi)-(a-bi) = (a-a)+(bi+bi) = 2bi$ là số ảo (thuần ảo).

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 9 Tìm tham số thực m để số phức $z = 1+mi+(1+mi)^2$ là số thuần ảo.

(A) $m=\sqrt{2}$; **(B)** $m=-\sqrt{2}$;

C) $m=\pm\sqrt{2}$; **(D)** Không có giá trị của m.

Giải:

$z = 1+mi+1+2mi+(mi)^2 = 2-m^2+3mi$

Để z là thuần ảo thì $2-m^2=0 \Leftrightarrow m^2=2 \Leftrightarrow m=\pm\sqrt{2} \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập biểu thức

CMPLX Math

$1+Mi+(1+Mi)^2$

Sau đó nhấn CALC và thử các giá trị của tham số m.

CALC $\sqrt{2} =$ ta được $z = 3i\sqrt{2}$ là số thuần ảo.

CALC $-\sqrt{2} =$ ta được $z = -3i\sqrt{2}$ là số thuần ảo.

Vậy $m = \pm\sqrt{2}$ là giá trị cần tìm.

Bài tập 10 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

(a) $|\overline{z}| = |z|$; (b) $\overline{\overline{z}} = z$; (c) $|z| = \sqrt{z\overline{z}}$.

Giải:

Giả sử z = a + bi, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overline{z} = a - bi$.

Ta có: $|\overline{z}| = |a - bi| = \sqrt{a^2 + (-b)^2} = \sqrt{a^2 + b^2} = |z| \Rightarrow$ (a) đúng.

$\overline{\overline{z}} = \overline{a - bi} = a + bi = z \Rightarrow$ (b) đúng.

$z\overline{z} = (a + bi)(a - bi) = a^2 - (bi)^2 = a^2 + b^2 = |z|^2 \Rightarrow |z| = \sqrt{z\overline{z}} \Rightarrow$ (c) đúng.

Chọn (D).

Bài tập 11 Cho số phức $\omega = z_1 - 2z_2$, trong đó $z_1 = 1 + 2i; z_2 = 2 - 3i$. Khẳng định ĐÚNG là:

(A) $\omega = 5 - 4i$.

(B) Phần thực và phần ảo của ω lần lượt là 8 và -3.

(C) Số phức liên hợp của ω là 3 – 8i.

(D) Bình phương môđun của ω là 73.

Giải:

Ta có: $\omega = (1 + 2i) - 2(2 - 3i) = 1 + 2i - 4 + 6i = -3 + 8i \Rightarrow$ (a) sai.

Phần thực của ω là -3; phần ảo của ω là 8 $\Rightarrow$ (b) sai.

Số phức liên hợp của ω là: $\overline{\omega} = \overline{-3 + 8i} = -3 - 8i \Rightarrow$ (c) sai.

Môđun của ω là: $|\omega| = |-3 + 8i| = \sqrt{(-3)^2 + 8^2} = \sqrt{73} \Rightarrow \omega^2 = 73 \Rightarrow$ (d) đúng.

Chọn (D).

Bài tập 12 Cho $\omega = z_1 z_2$, biết rằng $z_1 = 2 + 5i; z_2 = 3 - 4i$. Khẳng định SAI là:

(A) $\omega = 5 - i$.

(B) Phần thực và phần ảo của ω lần lượt là 26 và 7.

(C) Số phức liên hợp của ω là 26 – 7i.

(D) Môđun của ω là $5\sqrt{29}$.

Giải:

Ta có: $\omega = (2 + 5i)(3 - 4i) = 6 - 8i + 15i - 20i^2 = 6 + 7i + 20 = 26 + 7i \Rightarrow$ (A) sai.

Phần thực của ω là 26; phần ảo của ω là 7 $\Rightarrow$ (B) đúng.

Số phức liên hợp của ω là: $\overline{z} = \overline{26 + 7i} = 26 - 7i \Rightarrow$ (C) đúng.

Môđun của ω là: $|z| = \sqrt{26^2 + 7^2} = 5\sqrt{29} \Rightarrow$ (D) đúng.

Chọn (A).

Bài tập 13: Số phức liên hợp của $z=(2-4i)(5+2i)+\dfrac{4-5i}{2+i}$ là:

(A) $\bar{z}=\dfrac{93}{5}-\dfrac{94}{5}i$; **(B)** $\bar{z}=-\dfrac{93}{5}-\dfrac{94}{5}i$; **(C)** $\bar{z}=\dfrac{93}{5}+\dfrac{94}{5}i$; **(D)** $\bar{z}=\dfrac{94}{5}-\dfrac{93}{5}i$.

Giải:

Ta có: $z=10+4i-20i-8i^2+\dfrac{(4-5i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}=18-16i+\dfrac{8-4i-10i+5i^2}{4-i^2}$

$=18-16i+\dfrac{3-14i}{5}=\left(18+\dfrac{3}{5}\right)-\left(16i+\dfrac{14}{5}i\right)=\dfrac{93}{5}-\dfrac{94}{5}i.$

Số phức liên hợp của z là: $\bar{z}=\overline{\dfrac{93}{5}-\dfrac{94}{5}i}=\dfrac{93}{5}+\dfrac{94}{5}i\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập

CMPLX Math

$(2-4i)(5+2i)+\dfrac{4-5i}{2+i}$

$\dfrac{93}{5}-\dfrac{94}{5}i$

ta được kết quả là $z=\dfrac{93}{5}-\dfrac{94}{5}i\Rightarrow\bar{z}=\dfrac{93}{5}+\dfrac{94}{5}i$

Bài tập 14: Môđun của số phức $z=\dfrac{2-i}{1-2i}-\dfrac{1+i}{3i}$ bằng:

(A) $\dfrac{7\sqrt{5}}{15}$; **(B)** $\dfrac{49}{45}$; **(B)** $\dfrac{7}{5}$; **(D)** $\dfrac{7}{15}$.

Giải:

Ta có: $z=\dfrac{(2-i)(1+2i)}{(1-2i)(1+2i)}-\dfrac{(1+i)i}{3i^2}=\dfrac{2+4i-i-2i^2}{1-4i^2}+\dfrac{i+i^2}{3}=\dfrac{4+3i}{5}+\dfrac{i-1}{3}$

$=\left(\dfrac{4}{5}-\dfrac{1}{3}\right)+\left(\dfrac{3}{5}i+\dfrac{1}{3}i\right)=\dfrac{7}{15}+\dfrac{14}{15}i.$

Môđun của z là: $|z|=\sqrt{\left(\dfrac{7}{15}\right)^2+\left(\dfrac{14}{15}\right)^2}=\dfrac{7\sqrt{5}}{15}.$

Chọn (A).

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Để tính Modun của *z* ta nhập SHIFT Abs (Nút hyp trên máy tính) sau đó nhập số phức cần tính modun và nhấn bằng để tìm kết quả.

CMPLX Math

$\left|\dfrac{2-i}{1-2i}-\dfrac{1+i}{3i}\right|$

$\dfrac{7\sqrt{5}}{15}$

Kết quả bài toán này là $\dfrac{7\sqrt{5}}{15}$.

Bài tập 15 Tính $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$.

(A) 1; **(B)** $\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; **(C)** $-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$; **(D)** -1.

Giải:

Ta có: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{\left(\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\dfrac{\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}{\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

Chọn (B).

Lưu ý: Có thể dùng CASIO Nhập

CMPLX Math ▲

$\dfrac{1}{\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i}$

$\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$

Bài tập 16 Tính giá trị của biểu thức: $M=\left(2+\sqrt{3}i\right)^2+\left(2-\sqrt{3}i\right)^2$.

(A) 14; **(B)** 8; **(C)** 2; **(D)** $\sqrt{14}$.

Giải:

Ta có: $M=4+4\sqrt{3}i+3i^2+4-4\sqrt{3}i+3i^2=8-3-3=2.$

Chọn (C).

Bài tập 17 Biết: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{3+4i}{1+i}$. Phần ảo của số phức z là:

(A) $-\dfrac{1}{25}$; **(B)** $\dfrac{7}{25}$; **(C)** $\dfrac{1}{25}$; **(D)** $-\dfrac{7}{25}$.

Giải:

Ta có: $\dfrac{1}{z}=\dfrac{3+4i}{1+i}\Rightarrow z=\dfrac{1+i}{3+4i}=\dfrac{(1+i)(3-4i)}{(3+4i)(3-4i)}=\dfrac{7-i}{25}=\dfrac{7}{25}-\dfrac{1}{25}i.$

Vậy phần thực của z là $\dfrac{7}{25}$ và phần ảo của z là $-\dfrac{1}{25}\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 18 Cho số phức $z=1+2i$. Phần thực và phần ảo của số phức $w=2z+\overline{z}$ lần lượt là:

(A) 3 và 2; **(B)** 2 và 3; **(C)** 3 và -2; **(D)** 2 và -3.

Giải:

Ta có: $\overline{z}=1-2i\Rightarrow w=2(1+2i)+1-2i=(2+1)+(4-2)i=3+2i.$

$\Rightarrow$ Phần thực và phần ảo của z lần lượt là 3 và 2.

Chọn (A).

Bài tập 19 Cho $z_1 = 2+i, z_2 = 3-i$. Tính $|z_1 + z_1z_2|$.

(A) 85; **(B)** $\sqrt{85}$; **(C)** 7; **(D)** $\sqrt{7}$.

Giải:

Ta có: $z_1 + z_1z_2 = 2+i+(2+i)(3-i) = 2+i+(6-2i+3i+1) = 9+2i$

$\Rightarrow |z_1 + z_1z_2| = |9+2i| = \sqrt{9^2+2^2} = \sqrt{85}.$

Chọn (B).

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập SHIFT Abs $(2+i)+(2+i)(3-i)$ ta được kết quả bằng $\sqrt{85}$

Bài tập 20 Cho số phức $z = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i$. Xét các khẳng định sau:

(a) $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$

(b) $\left(\bar{z}\right)^2 = 1.$

(c) $z^2 = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$

(d) $\left(\bar{z}\right)^3 = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i.$

(e) $1+z+z^2 = \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i.$

Các khẳng định ĐÚNG là:

(A) (a), (b) và (d); **(B)** (a) và (b); **(C)** (a), (c) và (e); **(D)** (a) và (c).

Giải:

Ta có: $\bar{z} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i \Rightarrow$ (a) đúng.

$z^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$ (c) đúng.

$\left(\bar{z}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^2 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}i^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$ (b) sai.

$\left(\bar{z}\right)^3 = \left(\bar{z}\right)^2.\bar{z} = \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{4} + \frac{1}{4}i + \frac{3}{4}i - \frac{\sqrt{3}}{4} = i \Rightarrow$ (d) sai.

$1+z+z^2 = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i + \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \frac{3+\sqrt{3}}{2} - \frac{1+\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$ (e) đúng.

Chọn (C).

Nhận xét: Trong bài này, để tính $\left(\bar{z}\right)^3$ ta có thể sử dụng hằng đẳng thức như trong số thực.

Bài tập 21 Tìm phần ảo của số phức z, biết: $\bar{z}=\left(\sqrt{2}+i\right)^2\left(1-\sqrt{2}i\right)$.

(A) 5; **(B)** $-\sqrt{2}$; **(C)** $\sqrt{2}$; **(D)** -5.

Giải:

Ta có: $\bar{z}=\left(1+2\sqrt{2}i\right)\left(1-\sqrt{2}i\right)=1-\sqrt{2}i+2\sqrt{2}i-4i^2=5+\sqrt{2}i$

$\Rightarrow z=5-\sqrt{2}i \Rightarrow$ Phần ảo của số phức z là $-\sqrt{2}$.

Chọn (B).

Bài tập 22 Giá trị của biểu thức $A=1+i+i^2+i^3+...+i^{2017}$ là:

(A) 0; **(B)** i; **(C)** 1 + i; **(D)** 2 + i.

Giải:

Các số hạng của A lập thành một cấp số nhân với công bội bằng i, số hạng đầu bằng 1 và số số hạng bằng 2018.

$\Rightarrow A=1.\dfrac{i^{2018}-1}{i-1}=\dfrac{i^{2018}-1}{i-1}$.

Ta có: $i^{2018}=\left(i^2\right)^{1009}=\left(-1\right)^{1009}=-1$.

Khi đó: $A=\dfrac{-1-1}{i-1}=\dfrac{-2}{i-1}=\dfrac{-2\left(i+1\right)}{\left(i-1\right)\left(i+1\right)}=\dfrac{-2\left(i+1\right)}{i^2-1}=\dfrac{-2\left(i+1\right)}{-2}=i+1$.

Chọn (C).

Nhắc lại: Tổng của n số hạng đầu tiên của một cấp số nhân có số hạng đầu là u_1 và công bội q là $S=u_1.\dfrac{q^n-1}{q-1}$.

Bài tập 23 Giá trị của biểu thức $B=1+\left(1+i\right)^2+\left(1+i\right)^4+...+\left(1+i\right)^{2016}$ là:

(A) 1; **(B)** 1 + i; **(C)** 2016; **(D)** $\dfrac{1-2^{1009}}{5}.\left(2i+1\right)$.

Giải:

Ta có: $\left(1+i\right)^2=1+2i+i^2=1+2i-1=2i$.

B là tổng của 1 cấp số nhân có số hạng đầu tiên là $u_1=1$, công bội $q=\left(1+i\right)^2=2i$.

Số số hạng của cấp số nhân là: $\left(2016-0\right):2+1=1009$ (số hạng)

Do đó: $B=1.\dfrac{\left(2i\right)^{1009}-1}{2i-1}=\dfrac{2^{1009}.i^{1008}.i-1}{2i-1}=\dfrac{2^{1009}.\left(i^2\right)^{504}-1}{2i-1}=\dfrac{2^{1009}\left(-1\right)^{504}-1}{2i-1}=\dfrac{2^{1009}-1}{2i-1}$

$=\left(2^{1009}-1\right).\dfrac{2i+1}{\left(2i-1\right)\left(2i+1\right)}=\left(2^{1009}-1\right).\dfrac{2i+1}{4i^2-1}=\left(2^{1009}-1\right).\dfrac{2i+1}{-4-1}=\dfrac{1-2^{1009}}{5}.\left(2i+1\right)$.

Chọn (D).

Bài tập 24 Phần thực của $C=(1-i)^{2017}$ là:

(A) 2^{1008}; **(B)** -2^{1008}; **(C)** 2017; **(D)** 2018.

Giải:

Ta có: $C=(1-i)^{2016}.(1-i)=\left[(1-i)^2\right]^{1008}.(1-i)=\left(1-2i+i^2\right)^{1008}.(1-i)$

$=(-2i)^{1008}.(1-i)=2^{1008}.i^{1008}.(1-i)=2^{1008}.\left(i^2\right)^{504}.(1-i)=2^{1008}.(-1)^{504}.(1-i)$

$=2^{1008}.(1-i)=2^{1008}-2^{1008}i.$

Chọn (A).

Bài tập 25 Cho $D=i^{100}+i^{24}+i^{15}-i^{35}$. Chọn khẳng định ĐÚNG.

(A) Phần thực của D bằng 0. **(B)** Phần thực của D là số nguyên âm.

(C) Phần thực của D là số nguyên dương. **(D)** Phần ảo của D lớn hơn 1.

Giải:

Ta có: $i^{100}=\left(i^2\right)^{50}=(-1)^{50}=1;\ i^{24}=\left(i^2\right)^{12}=(-1)^{12}=1;$

$i^{15}=i^{14}.i=\left(i^2\right)^7.i=(-1)^7.i=-i;\ i^{35}=i^{34}.i=\left(i^2\right)^{17}.i=(-1)^{17}.i=-i.$

Khi đó: $D=1+1+(-i)-(-i)=2\Rightarrow$ Phần thực của D bằng 2 là số nguyên dương và phần ảo của D bằng 0 $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 26 Số phức $z=\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{2016}+\left(\dfrac{1-i}{1+i}\right)^{2017}$ có phần ảo bằng:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** -2.

Giải:

Ta có: $\dfrac{1+i}{1-i}=\dfrac{(1+i)^2}{(1-i)(1+i)}=\dfrac{1+2i+i^2}{1-i^2}=\dfrac{1+2i-1}{1+1}=\dfrac{2i}{2}=i\Rightarrow\dfrac{1-i}{1+i}=-i.$

Khi đó: $z=i^{2016}+(-i)^{2017}=\left(i^2\right)^{1008}+(-1)^{2017}.\left(i^2\right)^{1008}.i=(-1)^{1008}-(-1)^{1007}.i=1+i.$

$\Rightarrow$ Phần ảo của z bằng 1 $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 27 Cho số phức $z=\dfrac{2i}{1+i}-\dfrac{i}{1-i}$. Tìm số phức nghịch đảo của z.

(A) $-\dfrac{3}{2}-\dfrac{1}{2}i$; **(B)** $\dfrac{2}{3}+2i$; **(C)** $\dfrac{3}{5}-\dfrac{1}{5}i$; **(D)** $\dfrac{3}{5}+\dfrac{1}{5}i$.

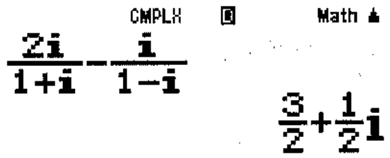
Giải:

Ta có: $z=\dfrac{2i(1-i)-i(1+i)}{(1+i)(1-i)}=\dfrac{2i-2i^2-i-i^2}{1-i^2}=\dfrac{3+i}{2}.$

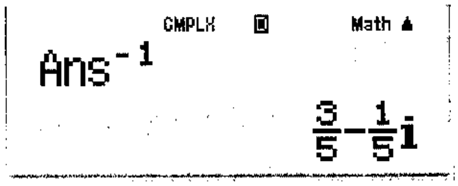
$$\Rightarrow \frac{1}{z} = \frac{2}{3+i} = \frac{2(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{6-2i}{3^2-i^2} = \frac{6-2i}{10} = \frac{3}{5} - \frac{1}{5}i.$$

Chọn (C).

Lưu ý: Sử dụng Casio ta được $z = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$



Do vậy



Bài tập 28 Biết rằng nghịch đảo của số phức z bằng số phức liên hợp của nó, trong các kết luận sau, kết luận nào là ĐÚNG?

(A) $z \in \mathbb{R}$; **(B)** $|z| = 1$;

(C) z là một số thuần ảo; **(D)** $|z| = -1$.

Giải:

Giả sử $z = a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$. Khi đó $\overline{z} = a - bi$.

Ta có: $\frac{1}{z} = \overline{z} \Leftrightarrow \frac{1}{a+bi} = a - bi \Leftrightarrow (a+bi)(a-bi) = 1 \Leftrightarrow a^2 - (bi)^2 = 1 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 1$

$\Leftrightarrow \sqrt{a^2+b^2} = 1 \Leftrightarrow |z| = 1 \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Môđun của một số phức bất kì luôn không âm nên dễ dàng loại trừ phương án **(D)**.

Bài tập 29 Nếu môđun của số phức z bằng $r > 0$ thì môđun của số phức $(1+i)^2 z$ bằng

(A) 4r; **(B)** 2r; **(C)** $r\sqrt{2}$; **(D)** r.

Giải:

Giả sử $z = a + bi$, trong đó $a, b \in \mathbb{R}$.

Ta có: $(1+i)^2 z = (1 + 2i + i^2)z = (1 + 2i - 1)z = 2iz = 2i(a+bi) = -2b + 2ai$.

$\Rightarrow \left|(1+i)^2 z\right| = |-2b + 2ai| = \sqrt{(-2b)^2 + (2a)^2} = 2\sqrt{a^2+b^2} = 2|z| = 2r \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Thử với số phức bất kỳ. Ví dụ:

CMPLX Math ▲
$|2+i|$
$\sqrt{5}$

Khi đó
CMPLX Math ▲
$|(1+i)^2(2+i)|$
$2\sqrt{5}$
nên ta chọn B.

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 30 Cho $z_1 = 2+3i,\ z_2 = 1+i$. Khi đó:

(A) $|z_1+3z_2| = 61$;

(B) $\dfrac{z_1+z_2}{z_2} = \dfrac{5\sqrt{2}}{2}$;

(C) $\left|\dfrac{z_1+z_2}{z_2}\right| = \dfrac{25}{2}$;

(D) $|z_1^3+3z_2| = \sqrt{2437}$.

Giải:

Ta có: $z_1+3z_2 = 2+3i+3+3i = 5+6i \Rightarrow |z_1+3z_2| = \sqrt{5^2+6^2} = \sqrt{61} \Rightarrow$ (A) sai.

$$\frac{z_1+z_2}{z_2} = \frac{3+4i}{1+i} = \frac{(3+4i)(1-i)}{1-i^2} = \frac{7+i}{2} \Rightarrow \left|\frac{z_1+z_2}{z_2}\right| = \sqrt{\frac{49}{4}+\frac{1}{4}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}.$$

$\Rightarrow$ (B) và (C) sai.

$$z_1^3+3z_2 = 8+36i+54i^2+27i^3-3-3i = -49+6i \Rightarrow |z_1^3+3z_2| = \sqrt{(-49)^2+6^2} = \sqrt{2437}$$

$\Rightarrow$ (D) đúng.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập $2+3i$ SHIFT STO X để lưu X là số phức z_1

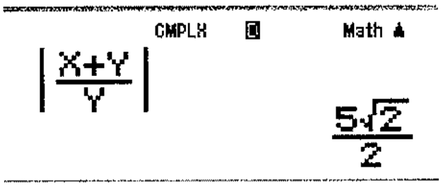
CMPLX Math ▲
3+2i→X
3+2i

Sau đó nhập $1+i$ SHIFT STO Y để lưu Y là số phức z_2

CMPLX Math ▲
1+i→Y
1+i

Sau đó tính các giá trị các Modun. Nhấn tổ hợp phím SHIFT Abs

Ví dụ: Ở đáp án C ta có:



Do vậy C là đáp án sai.

Bài tập 31 Tìm số phức z, biết: $z+2\overline{z}=(3-i)^3(1-i)$.

(A) $z=-8-44i$; **(B)** $z=-\frac{8}{3}+44i$; **(C)** $z=44-\frac{8}{3}i$; **(D)** $z=8+44i$.

Giải:

Ta có: $(3-i)^3(1-i)=\left(27-27i+9i^2-i^3\right)(1-i)=(27-27i-9+i)(1-i)$

$=(18-26i)(1-i)=18-18i-26i+26i^2=18-44i-26=-8-44i.$

Giả sử $z=a+bi\Rightarrow \overline{z}=a-bi$.

Khi đó: $z+2\overline{z}=(3-i)^3(1-i)\Leftrightarrow a+bi+2(a-bi)=-8-44i$

$\Leftrightarrow 3a-bi=-8-44i\Leftrightarrow \begin{cases}3a=-8\\-b=-44\end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases}a=-\frac{8}{3}.\\b=44\end{cases}$

Vậy $z=-\frac{8}{3}+44i\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Dùng máy tính ta được $(3-i)^3(1-i)=-8-44i$

Sau đó dùng máy tính thử lại 4 giá trị của z ở các đáp án A, B, C, D.

Bài tập 32 Tìm số phức z, biết: $(2+3i)z=z-1$.

(A) $z=-1-3i$; **(B)** $z=1-3i$; **(C)** $z=-\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$; **(D)** $z=\frac{1}{10}+\frac{3}{10}i$.

Giải:

Ta có: $(2+3i)z=z-1\Leftrightarrow(2+3i)z-z=-1$

$\Leftrightarrow(1+3i)z=-1\Leftrightarrow z=-\frac{1}{1+3i}$

$\Leftrightarrow z=-\frac{1-3i}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{3i-1}{1-9i^2}=\frac{3i-1}{10}$

$\Leftrightarrow z=\frac{-1}{10}+\frac{3}{10}i\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 33 Tìm số phức z, biết: $(2-i)\overline{z}-4=0$.

(A) $z=\frac{8}{5}+\frac{4}{5}i$; **(B)** $z=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$; **(C)** $z=\frac{4}{5}+\frac{8}{5}i$; **(D)** $z=\frac{4}{5}-\frac{8}{5}i$.

Giải:

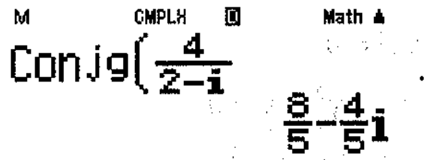
Ta có: $(2-i)\overline{z}-4=0 \Leftrightarrow \overline{z}=\frac{4}{2-i}=\frac{4(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\frac{8+4i}{4-i^2}=\frac{8+4i}{5}$

$\Leftrightarrow z=\frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$.

Chọn (B).

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Trong chế độ CMPLX nhấn SHIFT 2 2 ta được *Conjg*(được hiểu là số phức liên hợp của..

Bài toán này các em nhập 

. Chọn B.

Bài tập 34 Giải phương trình phức ẩn z: $\frac{2+i}{1-i}z=\frac{-1+3i}{2+i}$, ta được:

(A) z là số thực. **(B)** z là số thuần ảo.

(C) Phần thực của z là số nguyên. **(D)** Phần ảo của z lớn hơn 0 và nhỏ hơn 1.

Giải:

Ta có: $\frac{2+i}{1-i}z=\frac{-1+3i}{2+i} \Leftrightarrow z=\frac{-1+3i}{2+i}:\frac{2+i}{1-i}=\frac{(-1+3i)(1-i)}{(2+i)^2}=\frac{2+4i}{3+4i}$

$=\frac{(2+4i)(3-4i)}{25}=\frac{22+4i}{25}=\frac{22}{25}+\frac{4}{25}i \Rightarrow$ (A), (B) và (C) sai, (D) đúng.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 35 Giải phương trình phức ẩn z: $z+2\overline{z}=2-4i$, ta được

(A) z là số thực dương. **(B)** Phần thực của z là số hữu tỉ dương.

(C) Phần thực của z là số nguyên dương. **(D)** z là số thuần ảo.

Giải:

Đặt $z=x+yi \Rightarrow \overline{z}=z-yi$.

Khi đó: $z+2\overline{z}=2-4i \Leftrightarrow (x+yi)+2(x-yi)=2-4i$

$$\Leftrightarrow 3x - yi = 2 - 4i \Leftrightarrow \begin{cases} 3x = 2 \\ -y = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{2}{3} \\ y = 4 \end{cases}.$$

Vậy $z = \dfrac{2}{3} + 4i \Rightarrow$ (A), (C) và (D) sai; (B) đúng.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 36 Có bao nhiêu số phức z, thỏa mãn: $z^2 + \bar{z} = 0$?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Giả sử $z = x + yi \Rightarrow z^2 = x^2 - y^2 + 2xyi; \bar{z} = x - yi.$

Khi đó: $z^2 + \bar{z} = 0 \Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi + x - yi = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + x + (2xy - y)i = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ 2xy - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ y(2x-1) = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ y = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x^2 - y^2 + x = 0 \\ x = \dfrac{1}{2} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ x^2 + x = 0 \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ y^2 = \dfrac{3}{4} \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = -1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x = \dfrac{1}{2} \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{\sqrt{3}}{2} \\ y = -\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{array}\right. \end{cases} \end{array}\right..$$

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm: $z_1 = 0; z_2 = -1; z_3 = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}i; z_4 = \dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{3}}{2}i.$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 37 Có bao nhiêu số phức z, thỏa mãn: $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

$$\text{Ta có: } \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 = 1 & (1) \\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^2 = -1 & (2) \end{array}\right.$$

Ta có: $(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{z+i}{z-i}=1 \\ \dfrac{z+i}{z-i}=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+i=z-i \\ z+i=-z+i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} i=-i \\ z=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow z=0.$

$(2) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \dfrac{z+i}{z-i}=i \\ \dfrac{z+i}{z-i}=-i \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+i=zi+1 \\ z+i=-zi-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=\dfrac{1-i}{1-i}=1 \\ z=\dfrac{-1-i}{1+i}=-1 \end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là z = 0; z = 1 và z = -1.

Chọn (C).

Bài tập 38 Tìm các số thực x, y thỏa mãn điều kiện $(1-2i)x+(1+2y)i=1+i$.

(A) $x=y=3$; **(B)** $x=y=2$;

(C) $x=y=1$; **(D)** Không có x, y thỏa mãn.

Giải:

Ta có: $(1-2i)x+(1+2y)i=1+i \Leftrightarrow x+(-2x+1+2y)i=1+i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ -2x+1+2y=1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$.

Chọn (C).

Chú ý: Cho hai số phức $z=a+bi\left(a,b\in\mathbb{R}\right)$ và $z'=a'+b'i\left(a',b'\in\mathbb{R}\right)$. Khi đó:

$z=z' \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b' \end{cases}$.

Bài tập 39 Cho cặp số thực (x; y) thỏa mãn: $\dfrac{x+yi}{1-i}=3+2i$. Khi đó x + y bằng:

(A) 4; **(B)** -4; **(C)** 6; **(D)** -6.

Giải:

Ta có: $\dfrac{x+yi}{1-i}=3+2i \Leftrightarrow x+yi=(1-i)(3+2i) \Leftrightarrow x+yi=3+2i-3i-2i^2$

$\Leftrightarrow x+yi=5-i \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow x+y=5-1=4$

Chọn (A).

Bài tập 40 Có bao nhiêu cặp số thực (x; y) thỏa mãn $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i$?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: $\dfrac{x-3}{3+i}+\dfrac{y-3}{3-i}=i \Leftrightarrow \dfrac{(x-3)(3-i)}{(3+i)(3-i)}+\dfrac{(y-3)(3+i)}{(3-i)(3+i)}=i$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-9-(x-3)i}{9-i^2}+\frac{3y-9+(y-3)i}{9-i^2}=i$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x-9}{10}+\frac{3-x}{10}i+\frac{3y-9}{10}+\frac{y-3}{10}i=i$$

$$\Leftrightarrow \frac{3x+3y-18}{10}+\left(\frac{y-x}{10}\right)i=i \Leftrightarrow \begin{cases}\frac{3x+3y-18}{10}=0\\ \frac{y-x}{10}=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+y=6\\ y-x=10\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=-2\\ y=8\end{cases}.$$

$\Rightarrow (x;y)=(-2;8) \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 41 Cho x, y là các số thực thỏa mãn điều kiện $(-1+4i)x+(1+2i)^3y=2+9i$. Khi đó:

(A) x, y là các số nguyên.

(B) x, y là các số hữu tỉ dương.

(C) x và y là hai số hữu tỉ trái dấu.

(D) $x=-\frac{17}{46}$.

Giải:

Ta có: $(-1+4i)x+(1+2i)^3y=2+9i \Leftrightarrow (-1+4i)x+(1+6i+12i^2+8i^3)y=2+9i$

$\Leftrightarrow -x+4xi+(1+6i-12-8i)y=2+9i$

$\Leftrightarrow -x+4xi+(-11-2i)y=2+9i$

$$\Leftrightarrow -x-11y+(4x-2y)i=2+9i \Leftrightarrow \begin{cases}-x-11y=2\\ 4x-2y=9\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=\frac{95}{46}\\ y=-\frac{17}{46}\end{cases}.$$

$\Rightarrow$ (A), (B) và (D) sai; (C) đúng $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 42 Cho số phức z thỏa mãn $\bar{z}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}$. Tìm môđun của số phức $\bar{z}+iz$.

(A) $8\sqrt{2}$; **(B)** 128; **(C)** 16; **(D)** 8.

Giải:

Ta có: $\bar{z}=\frac{(1-\sqrt{3}i)^3}{1-i}=\frac{1-3\sqrt{3}i+3.(\sqrt{3}i)^2-(\sqrt{3}i)^3}{1-i}=\frac{1-3\sqrt{3}i-9+3\sqrt{3}i}{1-i}=\frac{-8}{1-i}$

$=\frac{-8(1+i)}{(1-i)(1+i)}=\frac{-8(1+i)}{2}=-4-4i.$

$\Rightarrow z=-4-4i.$

$\Rightarrow \bar{z}+iz=-4-4i+i(-4+4i)=-8-8i.$

Vậy $|\bar{z}+iz|=\sqrt{8^2+8^2}=8\sqrt{2} \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 43 Tính môđun của số phức z, biết: $(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i$.

(A) $\frac{4}{9}$; **(B)** $\frac{4}{3}$; **(C)** $\frac{\sqrt{2}}{3}$; **(D)** $\frac{2}{3}$.

Giải:

Giả sử z = a + bi.

Khi đó:

$$(2z-1)(1+i)+(\bar{z}+1)(1-i)=2-2i \Leftrightarrow (2a+2bi-1)(1+i)+(a-bi+1)(1-i)=2-2i$$

$$\Leftrightarrow 2a+2ai+2bi+2bi^2-1-i+a-ai-bi+bi^2+1-i=2-2i$$

$$\Leftrightarrow 3a-3ba+ai+bi-2i=2-2i$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3a-3b=2 \\ a+b-2=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=\frac{1}{3} \\ b=-\frac{1}{3} \end{cases}.$$

$$\Rightarrow z=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}i \Rightarrow |z|=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{3} \Rightarrow \textbf{Chọn (C).}$$

Bài tập 44 Cho số phức z thỏa mãn: $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$. Tìm môđun của số phức $\omega=z+1+i$.

(A) 13; **(B)** $\sqrt{13}$; **(C)** 25; **(D)** 5.

Giải:

Giả sử z = a + bi.

Khi đó: $(2+i)z+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i \Leftrightarrow (2+i)(a+bi)+\frac{2(1+2i)}{1+i}=7+8i$

$$\Leftrightarrow 2a+2bi+ai+bi^2+\frac{2(1+2i)(1-i)}{1+i^2}=7+8i$$

$$\Leftrightarrow 2a+2bi+ai-bi+1-i+2i-2i^2=7+8i$$

$$\Leftrightarrow 2a-b+3+(2b+a+1)i=7+8i \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-b+3=7 \\ 2b+a+1=8 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=3 \\ b=2 \end{cases}$$

$$\Rightarrow z=3+2i.$$

Do đó $\omega=3+2i+1+i=4+3i \Rightarrow |\omega|=\sqrt{4^2+3^2}=5 \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 45 Cho số phức z thỏa mãn: $\frac{5(\bar{z}+i)}{z+1}=2-i$. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG về môđun của số phức $\omega=1+z+z^2$?

(A) Là số nguyên dương.

(B) Là số nguyên dương nhỏ hơn 4.

(C) Bằng $\sqrt{13}$.

(D) Là số nguyên lớn hơn 4.

Giải:

Giả sử z = a + bi.

Khi đó $\dfrac{5\left(\bar{z}+i\right)}{z+1}=2-i \Leftrightarrow 5a-5i\left(b-1\right)=2a+2bi+2-ai-bi^2-i$

$\Leftrightarrow 3a-2-b-\left(5b-5-2b+a+1\right)=0$

$\Leftrightarrow 3a-2-b-\left(3b+a-4\right)i=0 \Leftrightarrow \begin{cases}3a-2-b=0\\3b+a-4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a=1\\b=1\end{cases}$

$\Rightarrow z=1+i.$

Do đó:

$\omega=1+1+i+\left(1+i\right)^2=2+i+1+2i+i^2=3+3i-1=2+3i \Rightarrow \left|\omega\right|=\sqrt{2^2+3^2}=\sqrt{13}$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 46 Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $\left|z\right|=6$ và phần ảo của z bằng 2?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Vì phần ảo của z bằng 2 nên z = a + 2i.

Ta có: $\left|z\right|=6 \Leftrightarrow \sqrt{a^2+2^2}=6 \Leftrightarrow a^2+4=36 \Leftrightarrow a^2=32 \Leftrightarrow a=\pm 4\sqrt{2}.$

Vậy có hai số phức thỏa mãn đề bài là $z=\pm 4\sqrt{2}+2i \Rightarrow$ **Chọn (C).**

C. Tăng tốc

Bài tập 47 Tìm số phức z, biết phần thực của z là 1 và z + 1 − 3i là số thực, với i là đơn vị ảo của tập hợp số phức.

(A) z = 1 + 2i; **(B)** z = 1 − 5i; **(C)** z = 1 + 3i; **(D)** z = 1 − 7i.

Giải:

Vì phần thực của z là 1 nên z = 1 + ai, trong đó $a \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z+1-3i=1+ai+1-3i=2+\left(a-3\right)i.$

Để z + 1 -3i là số thực thì $a-3=0 \Leftrightarrow a=3.$

Vậy z = 1 + 3i $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 48 Có bao nhiêu số phức z sao cho z^2 là số phức liên hợp của z?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Giả sử $z=x+yi, x, y \in \mathbb{R}.$

Theo giả thiết ta có: $z^2=\bar{z} \Leftrightarrow \left(x+yi\right)^2=x-yi \Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=x-yi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ 2xy = -y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = x \\ \left[\begin{array}{l} y = 0 \\ x = -\dfrac{1}{2} \end{array}\right. \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 0 \\ \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 1 \end{array}\right. \end{cases} \\ \begin{cases} x = -\dfrac{1}{2} \\ y = \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy có 4 số phức z là $z = 0; z = 1$ hoặc $z = -\dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 49 Tìm số phức z thỏa mãn $z + 3\overline{z} = 5 + 6i$ và $2z - \overline{z} = 3 - 4i$.

(A) $z = 2 - \dfrac{6}{7}i$; **(B)** $z = 14 - 6i$; **(C)** $z = 2 - 6i$; **(D)** $z = 14 + 6i$.

Giải:

Ta có: $z + 3\overline{z} + 3.\left(2z - \overline{z}\right) = 5 + 6i + 3.(3 - 4i)$

$\Leftrightarrow 7z = 14 - 6i \Leftrightarrow z = 2 - \dfrac{6}{7}i \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 50 Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $z - \overline{z} = 3i$ và z^2 là số thuần ảo.

(A) 0; **(B)** 2; **(C)** 1; **(D)** 3.

Giải:

Giả sử $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 + 2xyi - y^2 = \left(x^2 - y^2\right) + 2xyi$ là số thuần ảo

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow x = \pm y$.

Ta có: $z - \overline{z} = 3i \Leftrightarrow x + yi - (x - yi) = 3i \Leftrightarrow 2yi = 3i \Leftrightarrow y = \dfrac{3}{2}$.

Vậy $x = y = \dfrac{3}{2}$ hoặc $x = -y = -\dfrac{3}{2}$.

Vậy có hai số phức z thỏa mãn đề bài là: $z = \dfrac{3}{2} + \dfrac{3}{2}i$ và $z = \dfrac{3}{2} - \dfrac{3}{2}i \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Chú ý: Số phức z là số thuần ảo khi và chỉ khi phần thực của z bằng 0.

Bài tập 51 Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $|z_1| = |z_2| = 1; |z_1 + z_2| = \sqrt{3}$. Khi đó $|z_1 - z_2|$ bằng

(A) $\dfrac{1}{2}$; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 1.

Giải:

Đặt $z_1 = a_1 + b_1 i;\ z_2 = a_2 + b_2 i$.

Từ giả thiết ta có: $\begin{cases} a_1^2 + b_1^2 = a_2^2 + b_2^2 = 1 \\ (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 3 \end{cases}$

$\Rightarrow 2(a_1b_1 + a_2b_2) = 1 \Rightarrow (a_1 - a_2)^2 + (b_1 - b_2)^2 = 1 \Rightarrow |z| = \sqrt{1} = 1 \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 52 Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn $|z| = \sqrt{2}$ và z^2 là số thuần ảo?

(A) 4; **(B)** 3; **(C)** 2; **(D)** 1.

Giải:

Giả sử $z = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R})$, ta có: $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$, $z^2 = a^2 - b^2 + 2abi$.

Yêu cầu của bài toán thỏa mãn $\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + b^2 = 2 \\ a^2 - b^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 = 1 \\ b^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = \pm 1 \\ b = \pm 1 \end{cases}$.

Vậy các số phức cần tìm là: $1 + i,\ 1 - i;\ -1 + i;\ -1 - i \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 53 Có bao nhiêu cặp số nguyên x, y sao cho số phức $z = x + yi$ thỏa mãn: $z^3 = 18 + 26i$?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: $z^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow (x + yi)^3 = 18 + 26i \Leftrightarrow x^3 - 3xy^2 + (3x^2y - y^3)i = 18 + 26i$

$\Leftrightarrow \begin{cases} x^3 - 3xy^2 = 18 \\ 3x^2y - y^3 = 26 \end{cases} \Leftrightarrow 18(3x^2y - y^3) = 26(x^3 - 3xy^2)$

Đặt $y = tx \Rightarrow t = \frac{1}{3} \Rightarrow y = \frac{x}{3} \Rightarrow x^3 - 3x.\left(\frac{x}{3}\right)^2 = 18 \Leftrightarrow x^3 - \frac{x^3}{9} = 18 \Leftrightarrow x = 3 \Rightarrow y = 1$.

Vậy $x = 3; y = 1 \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 54 Tập hợp các số phức z thỏa mãn $|z - (2 + i)| = \sqrt{10}$ và $z.\overline{z} = 25$ là:

(A) $\{4 + 3i\}$; **(B)** $\{5\}$; **(C)** $\{3 + 4i\}$; **(D)** $\{5; 3 + 4i\}$.

Giải:

Giả sử $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $z - (2 + i) = (a - 2) + (b - 1)i$

Ta có: $|z - (2 + i)| = \sqrt{10} \Leftrightarrow (a - 2)^2 + (b - 1)^2 = 10$ (1)

$z.\overline{z} = 25 \Leftrightarrow a^2 + b^2 = 25$ (2)

Từ (1) và (2) ta có hệ $\begin{cases}(a-2)^2+(b-1)^2=10\\ a^2+b^2=25\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}a=3\\ b=4\end{cases}\\ \begin{cases}a=5\\ b=0\end{cases}\end{array}\right.$.

Vậy các số phức cần tìm là: z = 3 + 4i và z = 5.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Chú ý: Các em có thể sử dụng máy tính thử 4 đáp án để bài đã cho.

Tập hợp các số phức z thỏa mãn $z^2+|z|=0$ có số phần tử là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Khi đó: $z^2+|z|=0 \Leftrightarrow (x+yi)^2+\sqrt{x^2+y^2}=0$

$\Leftrightarrow \left(x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}\right)+2xyi=0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}x^2-y^2+\sqrt{x^2+y^2}=0\\ 2xy=0\end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ -y^2+|y|=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ x^2+|x|=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ |y|(1-|y|)=0\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ |x|(1+|x|)=0\end{cases}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=0\\ \left[\begin{array}{l}y=0\\ |y|=1\end{array}\right.\end{cases}\\ \begin{cases}y=0\\ x=0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x=0;y=0\\ x=0;y=1\\ x=0;y=-1\\ x=0;y=0\end{array}\right..$$

Vậy tập hợp các số phức z thỏa mãn để bài là: $\{0;i;-i\}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Tìm số phức z thỏa mãn điều kiện: z – 2 là số ảo và 2z – 5i là số thực.

(A) $z=\frac{5}{2}+2i$; **(B)** $z=2+\frac{5}{2}i$; **(C)** $z=2+\frac{4}{3}i$; **(D)** $z=3-\frac{2}{3}i$.

Giải:

Giả sử $z=a+bi\ (a,b\in\mathbb{R})$.

Ta có: $z-2=a-2+bi$ là số ảo $\Leftrightarrow a-2=0 \Leftrightarrow a=2$.

$2z-5i=2(a+bi)-5i=2a+(2b-5)i$ là số thực $\Leftrightarrow 2b-5=0 \Leftrightarrow b=\frac{5}{2}$.

Vậy số phức z cần tìm là: $z=2+\frac{5}{2}i \Rightarrow$ **Chọn (B).**

D. Về đích

Bài tập 57 Các số phức z thỏa mãn hệ phương trình $\begin{cases} 2|z-i| = |z-\bar{z}+2i| \\ \left|z^2-(\bar{z})^2\right| = 4 \end{cases}$

(A) Có phần ảo là nghịch đảo của phần thực.

(B) Có phần ảo là số thực dương.

(C) Có tích của phần thực và phần ảo bằng 1 hoặc -1.

(D) Là các số thuần ảo.

Giải:

Giả sử $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$.

Khi đó, hệ phương trình đã cho

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2|x+(y-1)i| = |(2y+2)i| \\ |4xyi| = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2|x+(y-1)i| = |2(y+1)i| \\ |4xyi| = 4 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{x^2+(y-1)^2} = 2\sqrt{(y+1)^2} \\ |xyi| = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{x^2}{4} \geq 0 \\ \left[\begin{array}{l} y = \dfrac{1}{x} \\ y = -\dfrac{1}{x} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pm\sqrt[3]{4} \\ y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}} \end{cases}.$$

Vậy số phức cần tìm là: $z = \pm\sqrt[3]{4} + \dfrac{1}{\sqrt[3]{4}}i \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 58 Có bao nhiêu số phức z thỏa mãn hệ: $\begin{cases} \left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \\ \left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right| = 1 \end{cases}$?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Giả sử $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$.

Khi đó: $\left|\dfrac{z-1}{z-i}\right| = 1 \Leftrightarrow |z-1| = |z-i|$

$\Leftrightarrow |x+yi-1| = |x+yi-i|$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 + 1 - 2x = x^2 + y^2 + 1 - 2y$

$\Leftrightarrow y = x.$

Ta có: $\left|\dfrac{z-3i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow |z-3i|=|z+i|$

$\Leftrightarrow |x+yi-3i|=|x+yi+i|$

$\Leftrightarrow |x+(y-3)i|=|x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-3)^2=x^2+(y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+y^2-6y+9=x^2+y^2+2y+1$

$\Leftrightarrow y=1 \Rightarrow x=1.$

Vậy có duy nhất 1 số phức thỏa mãn để bài là $z = 1 + i \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 59 Cho số phức $z=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$. Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

(a) $z^2+z+1=0$. (b) $\overline{z}=z^2=\dfrac{1}{z}$. (c) $z^3=1$.

Giải:

Ta có: $z^2=\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2 \Rightarrow z^2+z+1=\left(-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+\left(-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)+1=0 \Rightarrow$ (a) đúng.

$$\frac{1}{z}=\frac{1}{-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i}=\frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{1}=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

$\Rightarrow z^2=\overline{z}=\dfrac{1}{z} \Rightarrow$ (b) đúng.

Ta có: $z^3=z^2.z=1 \Rightarrow$ (c) đúng.

Vậy có tất cả 3 khẳng định đúng $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 60 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

(a) Số phức z đồng thời thỏa mãn $|z+1|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ và $|z^2+1|<1$.

(b) Mọi số thực z luôn thỏa mãn $|z+1|\geq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

(c) Mọi số thực z luôn thỏa mãn $|z^2+1|\geq 1$.

(d) Mỗi số phức z có ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau xảy ra: $|z+1| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc $|z^2+1| \ge 1$.

Giải:

Giả sử ta có đồng thời $|z+1| < \frac{1}{\sqrt{2}}$ và $|z^2+1| < 1$.

Đặt $z = a + bi\ (a, b \in \mathbb{R})$.

Ta có: $\begin{cases} (1+a)^2 + b^2 < \frac{1}{2} \\ (1+a^2-b^2) + 4a^2b^2 < 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2(a^2+b^2) + 4a + 1 < 0 & (1) \\ (a^2+b^2)^2 + 2(a^2-b^2) < 0 & (2) \end{cases}$

Cộng vế theo vế (1) và (2) ta được: $(a^2+b^2)^2 + (2a+1)^2 < 0$ (vô lí)

$\Rightarrow$ Điều giả sử là sai $\Rightarrow$ với mỗi số phức z có ít nhất một trong hai bất đẳng thức sau xảy ra: $|z+1| \ge \frac{1}{\sqrt{2}}$ hoặc. $|z^2+1| \ge 1 \Rightarrow$ (a), (b), (c) sai; (d) đúng.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 61 Cho số phức $z \ne 0$ thỏa mãn: $\left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| \le 2$. Khi đó:

(A) $\left|z + \frac{1}{z}\right| \le 2$; **(B)** $\left|z + \frac{1}{z}\right| = 2$; **(C)** $\left|z + \frac{1}{z}\right| > 2$; **(D)** $\left|z + \frac{1}{z}\right| \ge 2$.

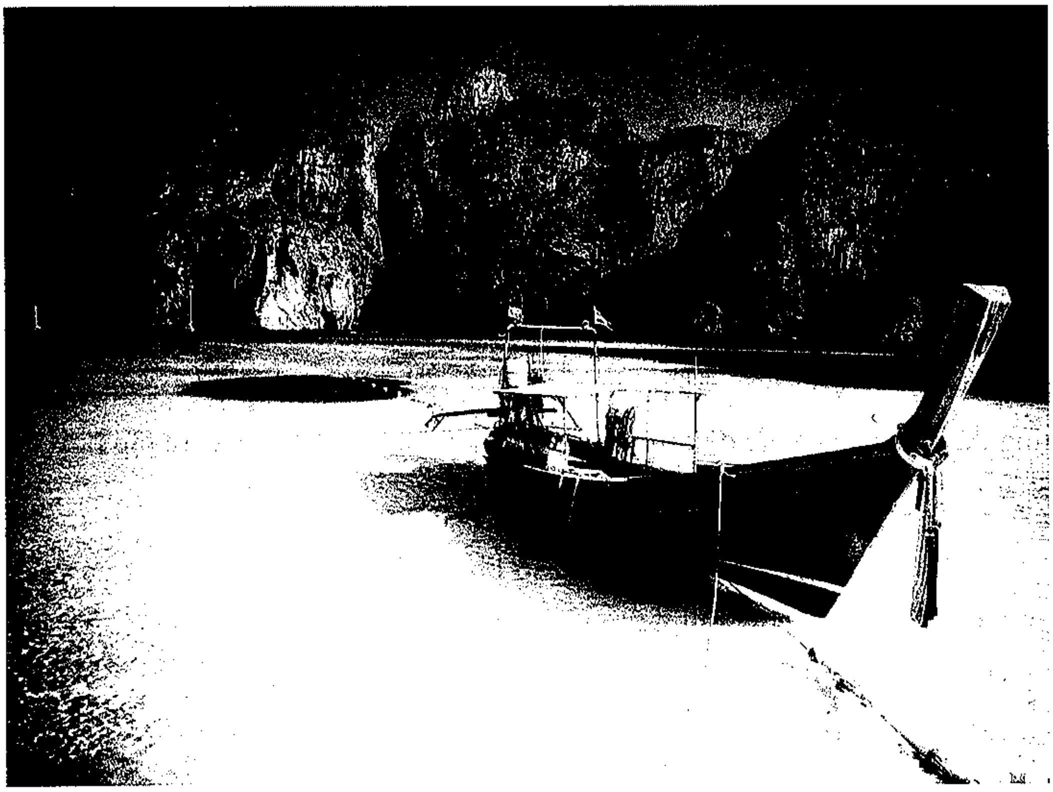
Giải:

Dễ chứng minh được rằng với hai số phức z_1, z_2 ta có: $|z_1 + z_2| \le |z_1| + |z_2|$.

Từ $\left(z + \frac{1}{z}\right)^3 = z^3 + \frac{1}{z^3} + 3\left(z + \frac{1}{z}\right) \Rightarrow \left|z + \frac{1}{z}\right| \le \left|z^3 + \frac{1}{z^3}\right| + 3\left|z + \frac{1}{z}\right| \le 2 + 3\left|z + \frac{1}{z}\right|$.

Đặt $a = \left|z + \frac{1}{z}\right|$ ta được $a^3 - 3a - 2 \le 0 \Leftrightarrow (a-2)(a+1)^2 \le 0 \Leftrightarrow a \le 2 \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Krabi



Nằm trên bờ biển phía tây nam của Thái Lan, **Krabi** là một trong những khu nghỉ mát bãi biển nổi tiếng nhất thế giới, với mặt biển xanh, bầu trời trong, và ẩm thực ngon miệng

VẤN ĐỀ 2

CÁC BÀI TOÁN VỀ BIỂU DIỄN HÌNH HỌC CỦA SỐ PHỨC

I KIẾN THỨC CƠ BẢN

Đối với các bài toán tìm tập hợp điểm biểu diễn một số phức z trong đó số phức z thỏa mãn một hệ thức nào đó (thường là hệ thức liên quan đến môđun của số phức). Khi đó ta giải bài toán này như sau:

Giả sử $z = x + yi, (x, y \in \mathbb{R})$. Khi đó số phức z biểu diễn trên mặt phẳng phức bởi điểm $M(x; y)$. Ta có: $OM = \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$.

Sử dụng dữ kiện của đề bài để tìm mối liên hệ giữa x và y, từ đó suy ra tập hợp điểm M.

Lưu ý:

- Với mỗi số thực dương R, tập hợp các số phức với $|z| = R$ biểu diễn trên mặt phẳng phức là đường tròn tâm O, bán kính R.

- Các số phức z, $|z| < R$ là các điểm nằm trong đường tròn (O; R).

- Các số phức z, $|z| > R$ là các điểm nằm ngoài đường tròn (O; R).

Tập hợp các điểm biểu diễn số phức thường gặp:

a) Phương trình đường thẳng: $ax + by + c = 0$.

b) Phương trình đường tròn: $(x-a)^2 + (y-b)^2 = R^2$.

c) Phương trình đường Elip: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

Ví dụ: Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng phức diểu diễn số phức z. Tìm tập hợp các điểm M(z) thỏa mãn điều kiện: $|z - 1 + i| = 2$.

Giải:

Đặt $z = x + yi (x, y \in \mathbb{R}) \Rightarrow z - 1 + i = (x-1) + (y+1)i$.

Khi đó: $|z - 1 + i| = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + (y+1)^2} = 2$

$\Leftrightarrow (x-1)^2 + (y+1)^2 = 4$.

Vậy tập hợp các điểm M(z) trên mặt phẳng tọa độ biểu diễn số phức z là đường tròn tâm I(1; -1), bán kính R = 2.

II BÀI TẬP

A. Khởi động

Bài tập 1 Cho M(1; 2). Viết dạng đại số của số phức z biểu diễn điểm M.

(A) $z = 2 + i$; **(B)** $z = 1 + 2i$; **(C)** $z = 1 - 2i$; **(D)** $z = 2 - i$.

Giải:

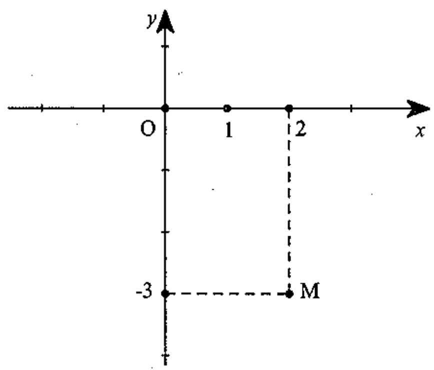
Dạng đại số của số phức z biểu diễn điểm M là: $z = 1 + 2i \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Chú ý: Cho điểm M(x; y) thì dạng đại số của số phức z biểu diễn điểm M là: $z = x + yi$.

Bài tập 2 Điểm M trong hình vẽ bên biểu diễn số phức:

(A) $z = -3 + 2i$; **(B)** $z = 2 - 3i$;

(C) $z = 2 + 3i$; **(D)** $z = 3 - 2i$.



Giải:

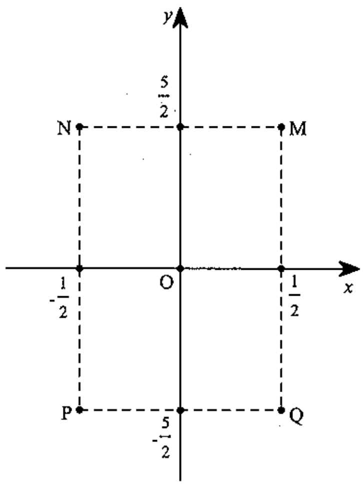
Ta có: $M(2; -3) \Rightarrow$ Điểm M biểu diễn số phức $z = 2 - 3i \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 3 Cho số phức z thỏa mãn $(1-i)z = 2i + 3$.

Hỏi điểm biểu diễn của điểm z là điểm nào trong các điểm M, N, P, Q ở hình bên?

(A) Điểm M; **(B)** Điểm N;

(C) Điểm P; **(D)** Điểm Q.



Giải:

Ta có:

$$z = \frac{2i+3}{1-i} = \frac{(2i+3)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{5i+1}{1-i^2} = \frac{5i+1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{5}{2}i$$

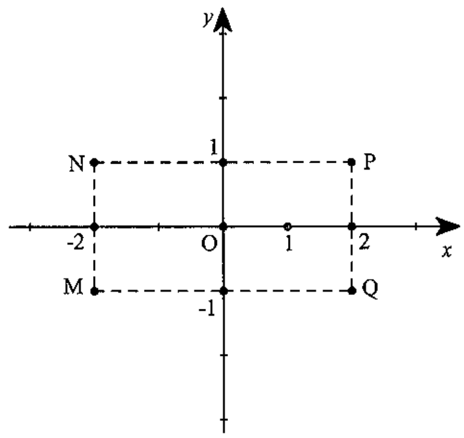
$\Rightarrow z\left(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}\right) \Rightarrow$ Điểm M biểu diễn số phức z

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 4 Cho điểm M có tọa độ như hình vẽ bên biểu diễn số phức z. Điểm nào biểu diễn số phức liên hợp của z?

(A) M; **(B)** N; **(C)** P; **(D)** Q.

Giải:



Vì M(-2; -1) nên z = -2 – i $\Rightarrow \overline{z} = -2 + i$

$\Rightarrow$ Điểm biểu diễn $\overline{z}$ có tọa độ là (-2; 1) $\Rightarrow$ đó là điểm N.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Với z = a + bi có điểm biểu diễn là $M(a;\ b)$ thì $\overline{z} = a - bi$ có điểm biểu diễn là $N(a; -b)$. Khi đó, M và N đối xứng nhau qua trục Ox.

Bài tập 5 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 4; **(B)** 3; **(C)** 2; **(D)** 1.

(a) Các điểm biểu diễn số thực nằm trên trục Oy trong mặt phẳng (Oxy).

(b) Các điểm biểu diễn số ảo nằm trên trục Oy trong mặt phẳng (Oxy).

(c) Các điểm biểu diễn số thực nằm trên trục Ox trong mặt phẳng (Oxy).

(d) Các điểm biểu diễn số ảo nằm trên trục Ox trong mặt phẳng (Oxy).

Giải:

Các điểm biểu diễn số thực z = a có tọa độ (a; 0) $\Rightarrow$ nằm trên trục Ox.

Các điểm biểu diễn số ảo z = ib có tọa độ (0; b) $\Rightarrow$ nằm trên trục Oy.

$\Rightarrow$ (a), (d) sai; (b), (c) đúng $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 6 Tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn $|z| = 1$ là:

(A) Đường tròn tâm O(0; 0), bán kính R = 1. **(B)** Đường thẳng y = x.

(C) Đường thẳng x = 1. **(D)** Đường thẳng y = 1.

Giải:

Giả sử z = x + yi, $x, y \in \mathbb{R}$ và điểm M biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z| = 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 1$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm O(0; 0), bán kính R = 1 $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 7 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = 3 - 4i; z_2 = 2 + i; z_3 = -2 + 8i$. Giả sử G là trọng tâm của tam giác ABC. Xác định dạng đại số của số phức z có điểm biểu diễn hình học là G.

(A) $z = 3 + 5i$; **(B)** $z = 5 + 3i$; **(C)** $z = 1 + \frac{5}{3}i$; **(D)** $z = \frac{3}{2} + \frac{5}{2}i$.

Giải:

Ta có: A(3; -4); B(2; 1); C(-2; 8).

Vì G là trọng tâm tam giác ABC nên $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} = \dfrac{3+2-2}{3} = 1 \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} = \dfrac{-4+1+8}{3} = \dfrac{5}{3} \end{cases} \Rightarrow G\left(1; \dfrac{5}{3}\right)$.

Vậy dạng đại số của số phức z có điểm biểu diễn hình học là G là: $z = 1 + \dfrac{5}{3}i$.

Chọn (C).

Lưu ý: Nhớ lại công thức tính tọa độ các điểm đặc biệt, chẳng hạn:

- Điểm M là trung điểm của đoạn thẳng AB thì $\begin{cases} x_M = \dfrac{x_A + x_B}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A + y_B}{2} \end{cases}$.

- Điểm G là trọng tâm tam giác ABC thì: $\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A + x_B + x_C}{3} \\ y_G = \dfrac{y_A + y_B + y_C}{3} \end{cases}$.

Tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn: $|z| \le 1$ là:

(A) Đường tròn tâm O(0; 0), bán kính R = 1.

(B) Hình tròn tâm O(0; 0), bán kính R = 1.

(C) Đường thẳng x = 1.

(D) Đường thẳng y = 1.

Giải:

Giả sử $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ và điểm M biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z| \le 1 \Leftrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} \le 1 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \le 1$.

Vậy tập hợp điểm M là hình tròn tâm O(0; 0), bán kính R = 1 $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn: $|z - 1| = 2$ là:

(A) Đường tròn tâm I(0; 1), bán kính R = 2. **(B)** Hình tròn tâm I(0; 1), bán kính R = 2.

(C) Đường tròn tâm I(1; 0), bán kính R = 2. **(D)** Hình tròn tâm I(1; 0), bán kính R = 2.

Giải:

Giả sử $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ và điểm M biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z - 1| = 2 \Leftrightarrow |x + yi - 1| = 2 \Leftrightarrow |(x-1) + yi| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 2 \Leftrightarrow \sqrt{(x-1)^2 + y^2} = 4$.

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I(1; 0), bán kính R = 2 $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 10 Tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn: $|z-i|=2$ là

(A) Đường tròn tâm I(0; 1), bán kính R = 2.

(B) Hình tròn tâm I(0; 1), bán kính R = 2.

(C) Đường tròn tâm I(1; 0), bán kính R = 2.

(D) Hình tròn tâm I(1; 0), bán kính R = 2.

Giải:

Giả sử $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ và điểm M biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z-i|=2 \Leftrightarrow |x+yi-i|=2 \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{x^2+(y-1)^2}=2 \Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=4.$

Vậy tập hợp điểm M là đường tròn tâm I(0; 1), bán kính R = 2 $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

B. Vượt chướng ngại vật

Bài tập 11 Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn z^2 là số thuần ảo.

(A) Đường tròn tâm O, bán kính R = 1.

(B) Hình tròn tâm O, bán kính R = 1.

(C) Hai đường phân giác y = x và y = -x.

(D) Hai đường thẳng x = 1 và y = 1.

Giải:

Giả sử $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ và điểm M biểu diễn số phức z.

Ta có: $z^2=(x+yi)^2=x^2+2xyi-y^2=(x^2-y^2)+2xyi$

Để z^2 là số thuần ảo thì: $x^2-y^2=0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} y=x \\ y=-x \end{array}\right.$.

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là hai đường phân giác: y = x và y = -x $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Chú ý: Số phức $u=a+bi$ là số thuần ảo $\Leftrightarrow a=0$.

Bài tập 12 Tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn $|z+\overline{z}+3|=5$ là:

(A) Đường thẳng x = 4.

(B) Đường thẳng y = 4.

(C) Đường thẳng x = 4 và đường thẳng x = 1.

(D) Hai đường thẳng x = 1 và x = -4.

Giải:

Giả sử $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$ và điểm M biểu diễn số phức z.

Ta có: $|z+\overline{z}+3|=5 \Leftrightarrow |x+yi+x-yi+3|=5$

$\Leftrightarrow |2x+3| = 5 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x+3=5 \\ 2x+3=-5 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} 2x=2 \\ 2x=-8 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=1 \\ x=-4 \end{array}\right.$.

Vậy tập hợp các điểm M là hai đường thẳng x = 1 và x = -4 $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 14 Tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn $z^2 = (\bar{z})^2$ là:

(A) Hai trục tọa độ. **(B)** Đường thẳng y = x.

(C) Đường thẳng y = -x. **(D)** Hai đường thẳng x = 1 và y = 1.

Giải:

Giả sử z = x + yi, $x, y \in \mathbb{R}$ và điểm M biểu diễn số phức z.

Ta có: $z^2 = (\bar{z})^2 \Leftrightarrow (x+yi)^2 = (x-yi)^2 \Leftrightarrow x^2 + 2xyi - y^2 = x^2 - 2xyi - y^2$

$\Leftrightarrow 4xyi = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=0 \\ y=0 \end{array}\right.$.

Vậy tập hợp các điểm M cần tìm là hai trục toạ độ $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

C. Tăng tốc

Bài tập 15 Giả sử M(z) là điểm trên mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Tập hợp các điểm M(z) thỏa mãn điều kiện: $|5+z| = |z-i|$ là:

(a) Đường thẳng (d): 5x + y + 12 = 0.

(b) Đường trung trực của AB.

(c) Đường thẳng (d): x – 2y + 1= 0.

(d) Đường thẳng (d): x + 2y – 1= 0.

Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định trên?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Cách 1: Ta có: $|5+z| = |z-i| \Leftrightarrow |z-(-5)| = |z-i|$ (1)

Gọi A là điểm biểu diễn số phức -5 và B là điểm biểu diễn số phức i (A(-5; 0) và B(0; 1))

Đẳng thức (1) chứng tỏ $M(z)A = M(z)B$.

Vậy tập hợp tất cả các điểm M(z) chính là đường trung trực của AB.

Cách 2: Giả sử z = x + yi, $x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $|5+z| = |z-i| \Leftrightarrow |(x+5)+yi| = |-x+(1-y)i|$

$\Leftrightarrow (x+5)^2 + y^2 = x^2 + (1-y)^2 \Leftrightarrow 10x + 2y + 24 = 0 \Leftrightarrow 5x + y + 12 = 0$

Vậy tập hợp các điểm M(z) là đường thẳng (d): 5x + y + 12 = 0.

Do đó, các khẳng định (a) và (b) đúng; (c) và (d) sai $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Đường thẳng (d): 5x + y + 12 = 0 chính là đường trung trực của đoạn AB.

Bài tập 15 Tìm tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn: $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1.$

(A) Là trục thực Ox.

(B) Là trục ảo Oy.

(C) Là hai trục tọa độ Ox và Oy.

(D) Là đường tròn tâm I(1; -1), bán kính R = 1.

Giải:

Giả sử $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{x+(y-1)i}{x+(y+1)i}\right|=1 \Leftrightarrow |x+(y-1)i|=|x+(y+1)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=x^2+(y+1)^2 \Leftrightarrow (y-1)^2=(y+1)^2 \Leftrightarrow y=0.$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là trục thực Ox $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Có thể biến đổi $\Leftrightarrow \left|\dfrac{z-i}{z+i}\right|=1$ về $|z-i|=|z+i| \Leftrightarrow |z-i|=|z-(-i).|$ Và có thể giải tiếp bài này theo cách 1 của Bài tập 14.

Bài tập 16 Tập hợp các điểm biểu diễn trong mặt phẳng phức các số phức thỏa mãn: $|z|=|\bar{z}-3+4i|$

(A) Là đường thẳng 3x + 4y = 2.

(B) Là đường thẳng 4x – 3y = 1.

(C) Là đường thẳng 3x – 2y = 2.

(D) Là đường thẳng 6x + 8y = 25.

Giải:

Đặt $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $|z|=|\bar{z}-3+4i| \Leftrightarrow |x+yi|=|x-3+(4-y)i| \Leftrightarrow \sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(x-3)^2+(4-y)^2}$

$\Leftrightarrow x^2+y^2=(x-3)^2+(4-y)^2 \Leftrightarrow x^2+y^2=x^2-6x+9+y^2-8y+16$

$\Leftrightarrow 6x+8y=25.$

Vậy tập hợp các điểm cần tìm là đường thẳng có phương trình 6x + 8y = 25 $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 17 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z-(3-4i)|=2.$

(A) Đường tròn có phương trình: $(x-3)^2+(y+4)^2=2.$

(B) Đường tròn có phương trình: $(x-3)^2+(y+4)^2=4.$

(C) Đường tròn có phương trình: $x+3\ ^2+\ y-4\ ^2=2.$

(D) Đường tròn có phương trình: $(x+3)^2+(y-4)^2=4.$

Giải:

Đặt $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Ta có: $\left|z-(3-4i)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|x+yi-(3-4i)\right| = 2 \Leftrightarrow \left|(x-3)+(y+4)i\right| = 2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-3)^2+(y+4)^2} = 2 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y+4)^2 = 4.$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường tròn có phương trình

$(x-3)^2+(y+4)^2 = 4.$

Chọn (B).

Bài tập 18 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm M(z) biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|3+z| > |z-3|$ là

(A) Nửa mặt phẳng bên phải trục hoành. **(B)** Trục hoành.

(C) Nửa mặt phẳng bên phải trục tung. **(D)** Trục tung.

Giải:

Cách 1: Đặt $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $|3+z| > |z-3| \Leftrightarrow |3+x+yi| > |x+yi-3| \Leftrightarrow |(3+x)+yi| > |(x-3)+yi|$

$\Leftrightarrow (x+3)^2+y^2 > (x-3)^2+y^2 \Leftrightarrow x^2+6x+9+y^2 > x^2-6x+9+y^2$

$\Leftrightarrow 12x > 0 \Leftrightarrow x > 0$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là nửa mặt phẳng bên phải trục tung.

Cách 2: Ta có: $|3+z| > |z-3| \Leftrightarrow |z-(-3)| > |z-3|$ (1)

Gọi A, B lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức -3 và 3, tức là A(-3; 0); B(3; 0)

Do đó $(1) \Leftrightarrow M(z)A > M(z)B$.

Mà A, B đối xứng nhau qua Oy nên tập hợp các điểm M(z) là nửa mặt phẳng bên phải trục tung.

Chọn (C).

Bài tập 19 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm M(z) biểu diễn số phức z thỏa mãn: $|z-6i|+|z+6i| = 20$ là

(A) Elip $(E): \frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64} = 1$. **(B)** Đường tròn $(x-6)^2+(y-6)^2 = 20$.

(C) Đường tròn $(x-6)^2+(y-6)^2 = 400$. **(D)** Elip $(E): \frac{x^2}{64}+\frac{y^2}{100} = 1$.

Giải:

Gọi F_1, F_2 tương ứng là các điểm biểu diễn các số phức 6i và -6i, tức là $F_1(0;6)$ và $F_2(0;-6)$.

Khi đó: $|z-6i|+|z+6i| = 20 \Leftrightarrow MF_1+MF_2 = 20.$

⇒ Tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z là elip (E) có hai tiêu điểm là F_1, F_2 và có độ dài trục lớn bằng 20.

Gọi phương trình elip là (E): $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

$\Rightarrow \begin{cases} 2a = 20 \\ c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 10 \\ b^2 = a^2 - c^2 = 100 - 36 = 64 \end{cases}$

⇒ Phương trình elip (E) là: $\frac{x^2}{100}+\frac{y^2}{64}=1 \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 20 Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i|$ là:

(A) Đường tròn $(x-1)^2+(y-2)^2=1$. **(B)** Parabol $y=\frac{x^2}{4}$.

(C) Đường thẳng $y=\frac{x}{2}$. **(D)** Elip $\frac{x^2}{4}+y^2=1$.

Giải:

Đặt $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $2|z-i| = |z-\bar{z}+2i| \Leftrightarrow |x+(y-1)i| = |(x+y)i|$

$\Leftrightarrow x^2+(y-1)^2=(x+y)^2 \Leftrightarrow x^2-4y=0 \Leftrightarrow y=\frac{x^2}{4}$.

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là parabol: $y=\frac{x^2}{4} \Rightarrow$ **Chọn (B).**

D Về đích

Bài tập 21 Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy, gọi A, B, C lần lượt là các điểm biểu diễn các số phức $z_1 = 2+3i, z_2 = 1+2i, z_3 = -2+7i$. Xét các khẳng định sau:

(1) ΔABC vuông; (2) ΔABC đều. (3) ΔABC cân.

Số khẳng định ĐÚNG là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: A(2; 3); B(1; 2): C(-2; 7).

Khi đó: $AB=(1-2)^2+(2-3)^2=2;\ AC^2=(-2-2)^2+(7-3)^2=32;$

$BC^2=(-2-1)^2+(7-2)^2=34.$

Ta có: $34=32+2$ nên $BC^2=AC^2+AB^2 \Rightarrow \Delta ABC$ vuông tại A

⇒ (1) đúng; (2) và (3) sai.

⇒ **Chọn (B).**

Lưu ý: Cần nhớ lại Định lí Pitago trong tam giác vuông: ΔABC vuông tại A
$\Leftrightarrow BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn: $\left|z^2 - \bar{z}^2\right| = 5$.

(A) Elip (E): $\dfrac{x^2}{5} + \dfrac{y^2}{4} = 1$.

(B) Hai nhánh (H): $xy = \dfrac{5}{4}$ và $xy = -\dfrac{5}{4}$.

(C) Đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = 5$.

(D) Đường tròn (C_1): $x^2 + y^2 = \dfrac{5}{2}$.

Giải:

Đặt $z = x + yi,\ x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó:

$$\left|z^2 - \bar{z}^2\right| = 5 \Leftrightarrow \left|(x+yi)^2 - (x-yi)^2\right| = 5 \Leftrightarrow \left|x^2 + 2xyi - y^2 - \left(x^2 - 2xyi - y^2\right)\right| = 5$$

$$\Leftrightarrow |4xyi| = 5 \Leftrightarrow 16x^2y^2 = 25 \Leftrightarrow x^2y^2 = \frac{25}{16} \Leftrightarrow xy = \pm\frac{5}{4}.$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hai nhánh (H): $xy = \dfrac{5}{4}$ và $xy = -\dfrac{5}{4}$.

Chọn (B).

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy, tìm tập hợp các điểm M(z) biểu diễn số phức z thỏa mãn: $3 \le |z + 1 - i| \le 5$.

(A) Đoạn AB, trong đó A(3; 0), B(5; 0).

(B) Đoạn AB, trong đó A(0; 3), B(0; 5).

(C) Hai đường thẳng x = 3 và x = 5.

(D) Hình vành khăn có tâm A(-1; 1), bán kính lớn là 5, bán kính nhỏ là 3.

Giải:

Ta có: $3 \le |z + 1 - i| \le 5 \Leftrightarrow 3 \le |z - (-1 + i)| \le 5$.

Gọi A(-1; 1) là điểm biểu diễn số phức -1 + i.

Khi đó: $3 \le MA \le 5$.

Vậy tập hợp các điểm M(z) biểu diễn số phức z là hình vành khăn có tâm A(-1; 1), bán kính lớn là 5, bán kính nhỏ là 3 $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

[Đề thi minh họa THPT Quốc Gia 2017]

Cho các số phức z thỏa mãn $|z| = 4$. Biết rằng tập hợp các điểm biểu diễn các số phức $w = (3 + 4i)z + i$ là một đường tròn. Tính bán kính r của đường tròn đó.

(A) r = 4; **(B)** r = 5; **(C)** r = 20; **(D)** r = 22.

Giải:

Giả sử $z = x + yi$, trong đó $x, y \in \mathbb{R}$.

$\Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = 16.$

Ta có: $w = (3+4i)(x+yi)+i = (3x-4y)+(4x+3y)i+i$

$\Leftrightarrow w - i = (3x-4y)+(4x+3y) \Rightarrow |w-i|^2 = (3x-4y)^2 + (4x+3y)^2$

$= 25(x^2+y^2) = 25.16 = 20^2$

$\Rightarrow$ w biểu diễn đường tròn tâm I(0; 1), bán kính r = 20 $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 25 Cho A, B là hai điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn theo thứ tự các số phức z_1, z_2 khác 0 và thỏa mãn $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2$. Khi đó, khẳng định **đúng nhất** là:

(A) OAB là tam giác đều, với O là gốc tọa độ.

(B) OAB là tam giác cân, với O là gốc tọa độ.

(C) OAB là tam giác vuông, với O là gốc tọa độ.

(D) Cả 3 khẳng định đều sai.

Giải:

Từ $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Rightarrow z_1^2 = z_1 z_2 - z_2^2 = z_2(z_1 - z_2)$

$\Rightarrow |z_1|^2 = |z_2|.|z_1 - z_2|$

Do $z_2 \neq 0$ nên $|z_1 - z_2| = \dfrac{|z_1^2|}{|z_2|}$ (1)

Từ $z_1^2 + z_2^2 = z_1 z_2 \Rightarrow z_2^2 = z_1 z_2 - z_1^2 = z_1(z_2 - z_1) \Rightarrow |z_2|^2 = |z_1.|z_2 - z_1||$

Do $z_1 \neq 0$ nên $|z_2 - z_1| = \dfrac{|z_2^2|}{|z_1|}$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: $\dfrac{|z_1|^2}{|z_2|} = \dfrac{|z_2|^2}{|z_1|} \Rightarrow |z_1|^3 = |z_2|^3 \Rightarrow |z_1| = |z_2|$

Kết hợp với (1) và (2) ta có: $|z_1| = |z_2| = |z_1 - z_2|$

$\Rightarrow OA = OB = AB$

$\Rightarrow$ OAB là tam giác đều $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bagan

Bagan là thành phố cổ ở miền Trung Myanmar, nơi có hàng nghìn ngôi chùa Phật giáo và đền thờ. Một trong những cách tốt nhất để chiêm ngưỡng cảnh quan nơi đây là ngồi khinh khí cầu khi mặt trời mọc

VẤN ĐỀ 3

TÌM SỐ PHỨC CÓ MÔĐUN LỚN NHẤT, NHỎ NHẤT

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

Bài toán: Tìm số phức z có môđun lớn nhất (hoặc nhỏ nhất) thỏa mãn điều kiện cho trước.

Phương pháp: Ta có thể thực hiện theo các bước sau:

Bước 1: Tìm tập hợp G các điểm biểu diễn số phức z thỏa mãn điều kiện.

Bước 2: Tìm số phức z tương ứng với điểm biểu diễn $M \in G$ sao cho khoảng cách OM có giá trị lớn nhất (hoặc nhỏ nhất).

II. BÀI TẬP

Cho số phức $z = 2m - 1 + mi$. Tìm m để số phức z có môđun nhỏ nhất.

(A) $m = \frac{2}{5}$; **(B)** $m = \frac{1}{\sqrt{5}}$; **(C)** $m = 0$; **(D)** $m = \frac{1}{5}$.

Giải:

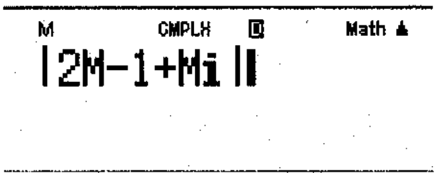
Ta có: $|z| = \sqrt{(2m-1)^2 + m^2} = \sqrt{4m^2 - 4m + 1 + m^2} = \sqrt{5m^2 - 4m + 1}$

$$= \sqrt{5\left(m^2 - 2.\frac{2}{5}m + \frac{4}{25}\right) + \frac{1}{5}} = \sqrt{5\left(m - \frac{2}{5}\right)^2 + \frac{1}{5}} \geq \frac{1}{\sqrt{5}}$$

$\Rightarrow |z|_{\min} = \frac{1}{\sqrt{5}} \Leftrightarrow m - \frac{2}{5} = 0 \Leftrightarrow m = \frac{2}{5} \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập biểu thức Modun của số phức đã cho.



Sau đó chúng ta CALC với 4 giá trị đề bài cho để tìm đáp án có modun nhỏ nhất

CALC $\frac{2}{5}$ ta được $\frac{1}{\sqrt{5}}$; CALC $\frac{1}{\sqrt{5}}$ ta được kết quả là $0,459$

CALC 0 ta được 1 và CALC $\frac{1}{5}$ ta được $\frac{\sqrt{10}}{5}$. Từ 4 kết quả trên ta lựa chọn phương án A.

Cho số phức $z=\frac{1}{\sqrt{1+2m^2}}+\frac{1}{5}i$. Tìm m để z có môđun lớn nhất.

(A) Không tồn tại m; **(B)** $m=0$; **(C)** $m=\frac{1}{2}$; **(D)** $m=\frac{1}{\sqrt{2}}$.

Giải:

Ta có: $|z|=\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{1+2m^2}}\right)^2+\left(\frac{1}{5}\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{1+2m^2}+\frac{1}{25}}\le\sqrt{1+\frac{1}{25}}=\frac{\sqrt{26}}{5}$

$\Rightarrow |z|_{max}=\frac{\sqrt{26}}{5}\Leftrightarrow m=0\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Cho số phức $z=\frac{i-m}{1-m(m-2i)},(m\in\mathbb{R})$. Tìm số phức z có môđun lớn nhất.

(A) $z=1$; **(B)** $z=m+i$; **(C)** $z=m+2i$; **(D)** $z=i$.

Giải:

Ta có: $z=\frac{i-m}{1-m^2+2mi}=\frac{(i-m)(1-m^2-2mi)}{(1-m^2+2mi)(1-m^2-2mi)}$

$=\frac{-m(1-m^2)+2m+(1-m^2+2m^2)}{(1-m^2)^2+4m^2}=\frac{m(1+m^2)+(1+m^2)i}{(1+m^2)^2}=\frac{m}{1+m^2}+\frac{1}{1+m^2}i$

$\Rightarrow |z|=\sqrt{\left(\frac{m}{1+m^2}\right)^2+\left(\frac{1}{1+m^2}\right)^2}=\sqrt{\frac{m^2+1}{(m^2+1)^2}}=\frac{1}{m^2+1}\le 1$

$\Rightarrow |z|_{max}=1\Leftrightarrow m=0$

$\Rightarrow z=i\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Cho số phức z thỏa mãn: $u=(z+3-i)(\overline{z}+1+3i)$ là một số thực. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

(A) $|z|_{min}=8$; **(B)** $|z|_{min}=2\sqrt{2}$; **(C)** $|z|_{min}=10$; **(D)** $|z|_{min}=\sqrt{10}$.

Giải:

Đặt $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $u=[a+3+(b-1)i][a+1-(b-3)i]=a^2+b^2+4a-4b+6+2(a-b-4)i$

$u\in\mathbb{R}\Leftrightarrow a-b-4=0\Leftrightarrow a=b+4$.

Ta có: $|z|^2=a^2+b^2=(b+4)^2+b^2=2b^2+8b+16=2(b+2)^2+8\ge 8$.

Dấu = xảy ra khi b = -2 $\Rightarrow a=2$.

$\Rightarrow |z|_{min}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow z=2-2i\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 5 Cho số phức z thỏa mãn: $|z+i+1|=|\bar{z}-2i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z|$.

(A) $|z|_{min}=\frac{1}{2}$; **(B)** $|z|_{min}=\frac{5}{2}$; **(C)** $|z|_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}$; **(D)** $|z|_{min}=\frac{5\sqrt{2}}{2}$.

Giải:

Đặt $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $|z+i+1|=|\bar{z}-2i| \Leftrightarrow |a+bi+i+1|=|a-bi-2i|$

$\Leftrightarrow |(a+1)+(b+1)i|=|a-(b+2)i| \Leftrightarrow (a+1)^2+(b+1)^2=a^2+(b+2)^2$

$\Leftrightarrow a^2+2a+1+b^2+2b+1=a^2+b^2+4b+4 \Leftrightarrow 2a-2b-2=0$

$\Leftrightarrow a-b=1 \Leftrightarrow a=b+1$

$\Rightarrow a^2+b^2=(b+1)^2+b^2=2b^2+2b+1=2\left(b+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}$

$\Rightarrow |z|\geq\sqrt{\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow b=-\frac{1}{2}\Rightarrow a=\frac{1}{2}$.

Vậy $|z|_{min}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow z=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 6 Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất thỏa mãn điều kiện: $|z-2-4i|=|z-2i|$.

(A) $z=2+2i$; **(B)** $z=-2+2i$; **(C)** $z=4i$; **(D)** $z=4$.

Giải:

Giả sử $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $|z-2-4i|=|z-2i| \Leftrightarrow |(x-2)+(y-4)i|=|x+(y-2)i|$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=x^2+(y-2)^2$

$\Leftrightarrow x+y-4=0 \Leftrightarrow y=-x+4$.

Ta có: $|y|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(-x+4)^2}=\sqrt{2x^2-8x+16}=\sqrt{2(x-2)^2+8}\geq 2\sqrt{2}$.

Do đó: $|z|_{min}=2\sqrt{2}\Leftrightarrow x=2,y=2\Rightarrow z=2+2i\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập biểu thức:

CALC $2+2i$ ta được kết quả bằng 0

Tương tự như vậy ta thử các kết quả ở các đáp án B, C, D. Ta thấy $2+2i$ là số phức có modun nhỏ nhất và thoả mãn yêu cầu đề bài. Chọn A.

C. Tăng tốc

Bài tập 7 Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện: $|z-2+3i|=2$, có bao nhiêu số phức z có môđun nhỏ nhất?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Đặt $z=x+yi,\ x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $|z-2+3i|=2 \Leftrightarrow |x+yi-2+3i|=2 \Leftrightarrow |(x-2)+(y+3)i|=2$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x-2)^2+(y+3)^2}=2 \Leftrightarrow (x-2)^2+(y+3)^2=4.$

Do đó, tập hợp các điểm M biểu diễn số phức z nằm trên đường tròn tâm I(2; -3), bán kính R = 2.

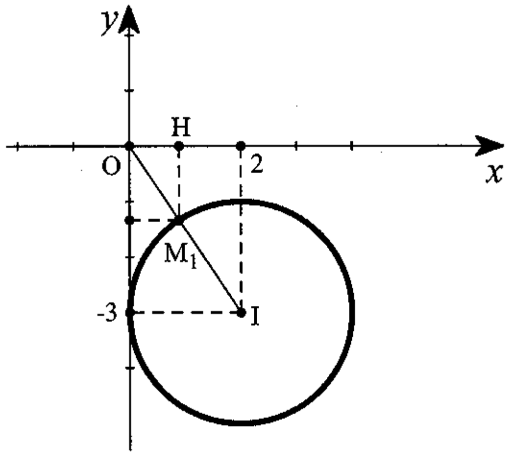
Ta có: $|z|$ min $\Leftrightarrow$ Điểm M nằm trên đường tròn và gần O nhất $\Rightarrow M\equiv M_1=OI\cap(O)$

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Ta có thể tìm điểm M_1 bằng các cách như sau:

Cách 1: Ta có: $OI=\sqrt{2^2+3^2}=13$.

Kẻ $MH\perp Ox$. Theo định lí Ta lét ta có:



$$\frac{M_1H}{3}=\frac{OM_1}{OI}=\frac{\sqrt{13}-2}{\sqrt{13}}$$

$$\Rightarrow \sqrt{13}M_1H=3\sqrt{13}-6$$

$$\Rightarrow M_1H=\frac{3\sqrt{13}-6}{\sqrt{13}}=\frac{39-6\sqrt{13}}{13}.$$

Lại có $\frac{OH}{2}=\frac{\sqrt{13}-2}{\sqrt{13}}\Rightarrow OH=\frac{2\sqrt{13}-4}{\sqrt{13}}$

$$=\frac{26-4\sqrt{13}}{13}.$$

Cách 2: Ta có thể tìm điểm M_1 bằng cách khác như sau:

Đường thẳng OM có phương trình: $y=-\frac{3}{2}x$.

Để tìm M_1 ta xét hệ $\begin{cases}(x-2)^2+(y+3)^2=4\\ y=-\frac{3}{2}x\end{cases}$.

Khi đó hệ sẽ cho 2 nghiệm $(x_1,y_1),(x_2,y_2)$.

Giả sử $x_1<x_2$. Khi đó $M_1=(x_1;y_1)$ và $z=x_1+y_1i$ là số phức cần tìm.

Cách 3: Giả sử $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $|z-2+3i| = 2 \Leftrightarrow (x-2)^2 + (y+3)^2 = 4$.

Đặt $\begin{cases} x-2 = 2\sin t \\ y+3 = 2\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+2\sin t \\ y = -3+2\cos t \end{cases}$

$\Rightarrow |z|^2 = x^2 + y^2 = (2+2\sin t)^2 + (-3+2\cos t)^2 = 4 + 8\sin t + 4\sin^2 t + 9 - 12\cos t + 4\cos^2 t$

$= 17 + 8\sin t - 12\cos t = 17 + 4\sqrt{13}.\left(\dfrac{8}{4\sqrt{13}}\sin t - \dfrac{12}{4\sqrt{13}}\cos t\right)$

$= 17 + 4\sqrt{13}.(\sin\alpha\sin t - \cos\alpha\cos t) = 17 - 4\sqrt{13}\cos(\alpha + t) \ge 17 - 4\sqrt{13}$.

$\Rightarrow |z|_{\min} = \sqrt{17 - 4\sqrt{13}} = \sqrt{\left(\sqrt{13}-2\right)^2} = \sqrt{13} - 2$

Dấu = xảy ra $\Leftrightarrow \cos(\alpha + t) = 1 \Leftrightarrow \alpha + t = k2\pi \Leftrightarrow t = -\alpha + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Khi đó: $z = (2+2\sin t) + (-3+2\cos t)i$ với t được xác định như trên.

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i| = 1$, tìm số phức z có môđun lớn nhất.

(A) $z = 2 - \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \left(4 - \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)i$; **(B)** $z = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} + \left(4 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)i$;

(C) $z = 2 + 4i$; **(D)** $z = 4 + 2i$.

Giải:

Giả sử $z = x + yi, x, y \in \mathbb{R}$.

Khi đó: $|z-2-4i| = 1 \Leftrightarrow |(x-2) + (y-4)i| = 1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2 + (y-4)^2 = 1$

Đặt $\begin{cases} x-2 = \sin t \\ y-4 = \cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2+\sin t \\ y = 4+\cos t \end{cases}$.

Khi đó: $|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(2+\sin t)^2 + (4+\cos t)^2}$

$= \sqrt{4 + 4\sin t + \sin^2 t + 16 + 8\cos t + \cos^2 t} = \sqrt{21 + 4\sin t + 8\cos t}$

Ta có: $(4\sin t + 8\cos t)^2 \le (4^2 + 8^2)(\sin^2 t + \cos^2 t) = 80$

$\Rightarrow 4\sin t + 8\cos t \le 4\sqrt{5}$

$\Rightarrow 21 + 4\sin t + 8\cos t \le 21 + 4\sqrt{5}$

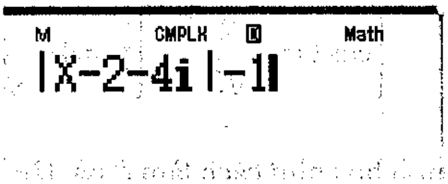
$\Rightarrow |z| \le \sqrt{21 + 4\sqrt{5}}$

Vậy $|z|_{\max} = \sqrt{21 + 4\sqrt{5}}$ khi $4\sin t + 8\cos t = 4\sqrt{5} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin t = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ \cos t = \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{5}} \\ y = 4 + \dfrac{2}{\sqrt{5}} \end{cases}$

$\Rightarrow z = 2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}} + \left(4 + \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)i \Rightarrow$ Chọn (B).

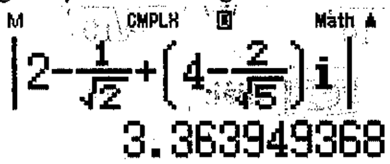
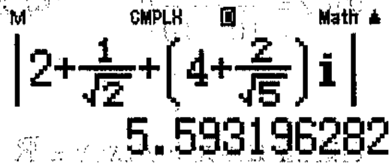
Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập biểu thức:



CALC với các giá trị của X là các giá trị ở các đáp án A, B, C, D.

Nhận thấy rằng đáp án A và B đều thoả mãn biểu thức. (Loại C và D)

Bây giờ tiếp tục dùng máy tính chúng ta kiểm tra Modun của 2 số phức được cho ở các đáp án A và B ta được  và 

Do đó lựa chọn đáp án B.

Nhận xét: Có thể giải bài toán bằng phương pháp hình học như cách làm ở Bài tập 8.

Trong các số phức z thỏa mãn điều kiện $|z-2-4i|=1$, tìm số phức z có môđun nhỏ nhất.

(A) $z=2-\frac{1}{\sqrt{5}}+\left(4-\frac{2}{\sqrt{5}}\right)i$; **(B)** $z=2+\frac{1}{\sqrt{5}}+\left(4+\frac{2}{\sqrt{5}}\right)i$;

(C) $z=2+4i$; **(D)** $z=4+2i$.

Giải:

Giả sử $z=x+yi, x, y\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $|z-2-4i|=1 \Leftrightarrow |(x-2)+(y-4)i|=1$

$\Leftrightarrow (x-2)^2+(y-4)^2=1$

Đặt $\begin{cases} x-2=\sin t \\ y-4=\cos t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=2+\sin t \\ y=4+\cos t \end{cases}$.

Khi đó: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{(2+\sin t)^2+(4+\cos t)^2}$

$=\sqrt{4+4\sin t+\sin^2 t+16+8\cos t+\cos^2 t}=\sqrt{21+4\sin t+8\cos t}$

Ta có: $(4\sin t+8\cos t)^2 \le (4^2+8^2)(\sin^2 t+\cos^2 t)=80$

$\Rightarrow 4\sin t+8\cos t \ge -4\sqrt{5}$

$\Rightarrow 21+4\sin t+8\cos t \ge 21-4\sqrt{5}$

$\Rightarrow |z| \ge \sqrt{21-4\sqrt{5}}$

Vậy $\left|z\right|_{\min}=\sqrt{21-4\sqrt{5}}$ khi $4\sin t+8\cos t=-4\sqrt{5}\Leftrightarrow\begin{cases}\sin t=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ \cos t=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2-\dfrac{1}{\sqrt{5}}\\ y=4-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\end{cases}$

$\Rightarrow z=2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\left(4-\dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)i\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Có thể giải bài toán bằng phương pháp hình học như cách làm ở Bài tập 8.

Bài tập 10 Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, biết số phức z thỏa mãn: $\left|\dfrac{z+2-3i}{\bar{z}-4+i}\right|=1$.

(A) $z=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{10}i$; **(B)** $z=\dfrac{1}{10}-\dfrac{3}{10}i$; **(C)** $z=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$; **(D)** $z=\dfrac{i}{\sqrt{10}}$.

Giải:

Giả sử $z=x+yi, x,y\in\mathbb{R}$.

Khi đó: $\left|\dfrac{z+2-3i}{\bar{z}-4+i}\right|=1\Leftrightarrow\left|\dfrac{(x+2)+(y-3)i}{(x-4)+(-y+1)i}\right|=1$

$\Leftrightarrow\left|(x+2)+(y-3)i\right|=\left|(x-4)+(-y+1)i\right|$

$\Leftrightarrow(x+2)^2+(y-3)^2=(x-4)^2+(-y+1)^2$

$\Leftrightarrow x^2+4x+4+y^2-6y+9=x^2-8x+16+y^2-2y+1$

$\Leftrightarrow 12x-4y=4\Leftrightarrow 3x-y=1\Leftrightarrow y=3x-1$

Khi đó: $\left|z\right|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{x^2+(3x-1)^2}=\sqrt{10x^2-6x+1}$

$=\sqrt{10\left(x^2-2.\dfrac{3}{10}x+\dfrac{9}{100}\right)+\dfrac{1}{10}}=\sqrt{10\left(x-\dfrac{3}{10}\right)^2+\dfrac{1}{10}}\ge\dfrac{1}{\sqrt{10}}$

$\Rightarrow z_{\min}=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ khi $x=\dfrac{3}{10}\Rightarrow y=-\dfrac{1}{10}\Rightarrow z=\dfrac{3}{10}-\dfrac{1}{10}i\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Trong chế độ CMPLX nhấn SHIFT 2 2 ta được Conjg (được gọi là số phức liên hợp. Ví dụ: $Conjg(1+2i)=1-2i$

Tức là số phức liên hợp của số phức $1+2i$ bằng $1-2i$

Đối với bài toán này ta nhập $\left|\dfrac{X+3-3i}{Conjg(X)-4+i}\right|-1$

Sau đó ta CALC các giá trị ở các đáp án A, B, C, D ta thấy chỉ có đáp án A là chính xác.

D. Về đích

Bài tập 11 Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất, biết số phức z thỏa mãn: $|z+1|+|z-1|=6$.

(A) $z=2\sqrt{2}$ và $z=3$; **(B)** $z=\pm 2\sqrt{2}i$ và $z=\pm 3$;

(C) $z=\pm 2\sqrt{2}$ và $z=\pm 3$; **(D)** $z=-2\sqrt{2}$ và $z=-3$;

Giải:

Trong mặt phẳng Oxy, giả sử các điểm M, F_1, F_2 lần lượt biểu diễn các số phức z, -1 và 1.

Ta có: $|z+1|+|z-1|=6 \Leftrightarrow |z-(-1)|++|z-1|=6 \Leftrightarrow \begin{cases} MF_1+MF_2=6 \\ F_1F_2=2 \end{cases}$.

Vậy tập hợp các điểm M là Elip (E) có phương trình: $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, trong đó $2a=6 \Leftrightarrow a=3$ và $c=1 \Rightarrow b^2=a^2-c^2=9-1=8$.

Phương trình Elip trong mặt phẳng tọa độ Oxy là: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1$.

Ta có: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{8+\dfrac{x^2}{9}}$.

Do $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{8}=1 \Rightarrow 0 \le \dfrac{x^2}{9} \le 1 \Rightarrow 2\sqrt{2} \le |z| \le 3$.

Vậy $|z|_{min}=2\sqrt{2} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\pm 2\sqrt{2} \Rightarrow z=\pm 2\sqrt{2}i$.

$|z|_{max}=3 \Leftrightarrow x=\pm 3 \Rightarrow y=0 \Rightarrow z=\pm 3$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

M CMPLX D Math ▲

Nhập |X+1|+|X-1|-6

Ta CALC các giá trị ở các đáp án A, B, C, D khi đó ta thấy chỉ có đáp án B thỏa mãn YCBT.

Bài tập 12 Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất, lớn nhất, biết số phức z thỏa mãn:
$|z+2|+|\bar{z}-2|=6$.

(A) $z=\pm\sqrt{5}i$ và $z=\pm 3$; **(B)** $z=\sqrt{5}$ và $z=\sqrt{41}$;

(C) $z=-\sqrt{5}$ và $z=-\sqrt{41}$; **(D)** $z=\pm\sqrt{5}$ và $z=\pm\sqrt{41}$.

Giải:

Giả sử M(x; y) biểu diễn số phức z, $F_1(-2;0)$ biểu diễn số phức -2 và $F_2(2;0)$ biểu diễn số phức 2.

Ta có: $|z+2|+|\bar{z}-2|=6 \Leftrightarrow |x+2+yi|+|x-2-yi|=6$

$\Leftrightarrow \sqrt{(x+2)^2+y^2}+\sqrt{(x-2)^2+y^2}=6$

$\Leftrightarrow MF_1+MF_2=6; F_1F_2=4.$

Tập hợp điểm M là elip có phương trình (E): $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$, trong đó: 2a = 6 và c = 2 $\Rightarrow a=6:2=3.$

Ta có: $b^2=a^2-c^2=9-4=5$

Phương trình Elip trong mặt phẳng tọa độ Oxy là: $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1.$

Ta có: $|z|=\sqrt{x^2+y^2}=\sqrt{5+\dfrac{4x^2}{9}}.$

Do $\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{5}=1 \Rightarrow 0\le\dfrac{x^2}{9}\le 1 \Rightarrow 0\le x^2\le 9 \Rightarrow 0\le\dfrac{4}{9}x^2\le 36 \Rightarrow \sqrt{5}\le|z|\le\sqrt{41}$

Vậy $|z|_{min}=\sqrt{5} \Leftrightarrow x=0 \Rightarrow y=\pm\sqrt{5} \Rightarrow z=\pm\sqrt{5}i$

$|z|_{max}=\sqrt{41} \Leftrightarrow x=\pm 3 \Rightarrow y^2=\dfrac{5}{3} \Leftrightarrow y=0 \Rightarrow z=\pm 3.$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập $|X+2|+|Conjg(X)-2|-6$.

CALC với các đáp án A, B, C, D ta thấy chỉ đáp án A thỏa mãn yêu cầu bài toán.

Cho hai số phức z_1, z_2 thỏa mãn: $|z_1+5|=5, |z_2+1-3i|=|z_2-3-6i|$. Tìm giá trị nhỏ nhất của $|z_1-z_2|$.

(A) 0; **(B)** $\dfrac{25}{2}$; **(C)** $\dfrac{5}{2}$; **(D)** $\dfrac{25}{4}$.

Giải:

Giả sử $A(a;b)$ biểu diễn số phức $z_1=a+bi$ và điểm B(c; d) biểu diễn số phức $z_2=c+di$.

Ta có: $|z_1+5|=5 \Leftrightarrow |(a+5)+bi|=5 \Leftrightarrow (a+5)^2+b^2=25$

$\Rightarrow$ Điểm A thuộc đường tròn (C): $(x+5)^2+y^2=25.$

Ta có: $|z_2+1-3i|=|z_2-3-6i| \Leftrightarrow |(c+1)+(d-3)i|=|(c-3)+(d-6)i|$

$\Leftrightarrow (c+1)^2+(d-3)^2=(c-3)^2+(d-6)^2$

$\Leftrightarrow c^2+2c+1+d^2-6d+9=c^2-6c+9+d^2-12d+36$

$\Leftrightarrow 8c+6d=35$

$\Rightarrow$ Điểm B thuộc đường thẳng (d): 8x + 6y = 35.

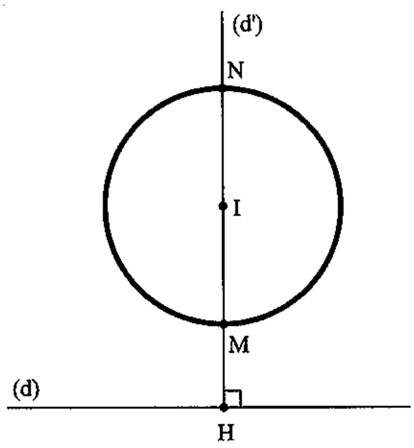
Khi đó: $|z_1-z_2|=AB.$

Gọi I(-5; 0) là tâm của đường tròn (C).

Ta có: $d(I,d)=\dfrac{|8.(-5)+6.0-35|}{\sqrt{8^2+6^2}}=\dfrac{15}{2}>R=5\Rightarrow$ (d) và (C) không giao nhau.

Phương trình đường thẳng (d') qua I(-5; 0) và vuông góc với (d) là:

(d'): 6x – 8y = -30.



Gọi H là giao điểm của (d) và (d') ⇒ Tọa độ của H là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}8x+6y=35\\6x-8y=-30\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=\dfrac{9}{2}\end{cases}\Rightarrow H\left(1;\dfrac{9}{2}\right).$$

Gọi M, N là giao điểm của (d') với (C) ⇒ tọa độ của M, N là nghiệm của hệ phương trình:

$$\begin{cases}(x+5)^2+y^2=25\\6x-8y=-30\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-1;y=3\\x=-9;y=-3\end{array}\right..$$

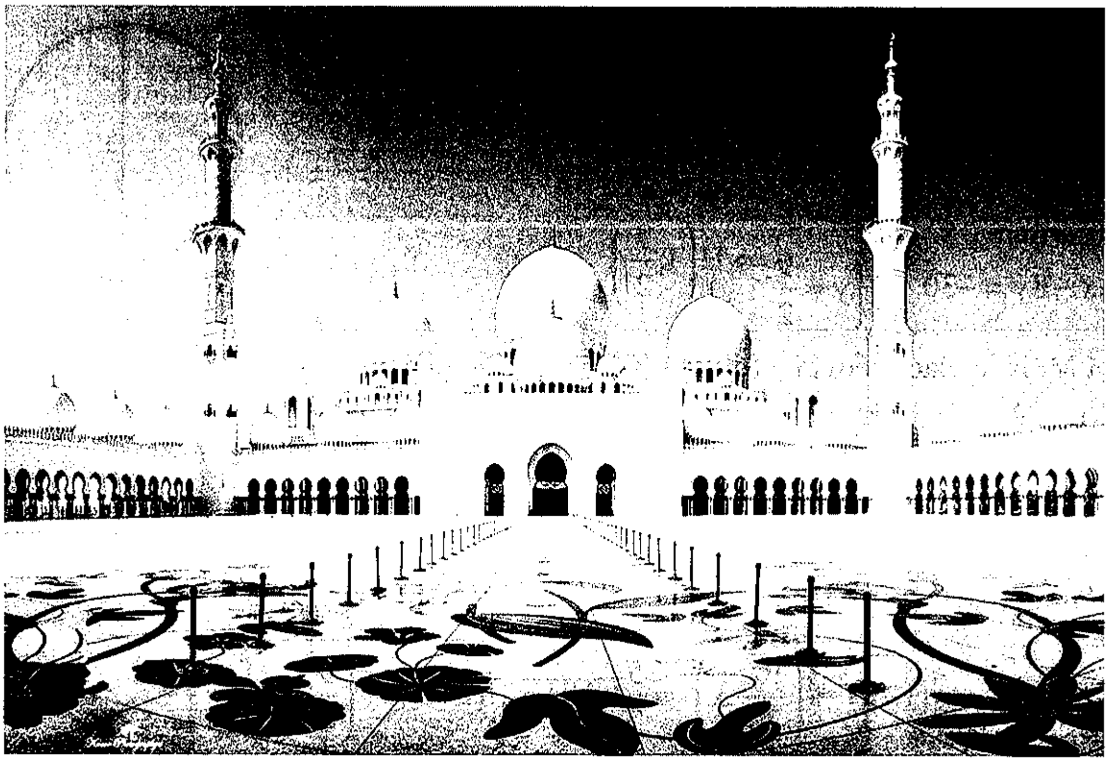
$\Rightarrow M(-1;3);N(-9;-3).$

Ta có: $MH=\sqrt{(1+1)^2+\left(\dfrac{9}{2}-3\right)^2}=\dfrac{5}{2};\ NH=\sqrt{(1+9)^2+\left(\dfrac{9}{2}+3\right)^2}=\dfrac{25}{2}$

$\Rightarrow AB_{min}=MH=\dfrac{5}{2}\Leftrightarrow A\equiv M,B\equiv H.$

Vậy $|z_1-z_2|$ nhỏ nhất bằng $\dfrac{5}{2}\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Đại thánh đường Sheikh Zayed



Với 82 mái vòm và đủ chỗ cho 40.000 tín đồ, đại thánh đường **Sheikh Zayed** không chỉ là một trong những nhà thờ Hồi giáo lớn nhất trên thế giới, mà còn là một trong những công trình tôn giáo đẹp nhất với một sân đá cẩm thạch khảm hoa, có nguồn gốc từ Trung Đông

VẤN ĐỀ 4

CĂN BẬC HAI CỦA SỐ PHỨC VÀ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - CÁC PHƯƠNG TRÌNH QUY VỀ BẬC HAI - HỆ PHƯƠNG TRÌNH

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. *Định nghĩa:*

Cho số phức w. Mỗi số phức z thỏa mãn $z^2 = w$ được gọi là một căn bậc hai của w.

Chú ý:

- Số 0 có đúng một căn bậc hai z = 0.
- Số $w \neq 0$ có đúng 2 căn bậc hai là 2 số đối khác nhau và khác 0.
- Số thực a có 2 căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.
- Số thực a < 0 có 2 căn bậc hai là $i\sqrt{-a}$ và $-i\sqrt{-a}$.

Hai căn bậc hai của -9 là 3i và -3i, vì:

$(3i)^2 = 9i^2 = 9.(-1) = -9$ và $(-3i)^2 = 9i^2 = 9.(-1) = -9$.

2. Phương trình bậc hai

Việc giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó a, b, c $(a \neq 0)$ là các số phức được tiến hành tương tự như với phương trình bậc hai với hệ số thực nhưng các phép tính ở đây (đặc biệt là phép lấy căn) là phép tính với các số phức.

a) Phương trình $z^2 - 3z + 4 = 0$ có biệt thức $\Delta = 9 - 16 = -7 = 7i^2$ nên nó có hai nghiệm phân biệt là: $z_{1,2} = \dfrac{3 \pm \sqrt{7}i}{2}$.

b) Phương trình $z^2 + (i+1)z + i = 0$ có biệt thức $\Delta = (i+1)^2 - 4i = (i-1)^2$ nên nó có hai nghiệm là:

$$z_1 = \frac{-(i+1)+(i-1)}{2} = -1 \text{ và } z_2 = \frac{-(i+1)-(i-1)}{2} = -i.$$

Chú ý: Mọi phương trình bậc hai (với hệ số phức) có hai nghiệm phức (có thể trùng nhau). Hơn nữa, mọi phương trình bậc n

$$A_0z^n + A_1z^{n-1} + \ldots + A_{n-1}z + A_n = 0$$

(trong đó n là một số nguyên dương), $A_0, A_1, \ldots, A_n$ là n + 1 số phức cho trước, $A_0 \neq 0$) luôn có n nghiệm phức (không nhất thiết phân biệt).

3. Các dạng toán cơ bản

3.1. DẠNG 1: Tìm căn bậc hai của số phức

Phương pháp: Có thể tìm căn bậc hai của số phức w như sau:

a) Trường hợp w là số thực

+ w = 0 thì căn bậc hai của w bằng 0.

+ $w = a \neq 0$.

Khi a > 0 thì a có hai căn bậc hai là $\sqrt{a}$ và $-\sqrt{a}$.

Khi a < 0 thì a có hai căn bậc hai là $\sqrt{-a}i$ và $-\sqrt{-a}i$.

Hai căn bậc hai của 4 là 2 và -2.

Hai căn bậc hai của -8 là: $2\sqrt{2}i$ và $-2\sqrt{2}i$.

b) Trường hợp $w = a + bi\,(a, b \in \mathbb{R}), b \neq 0$

$z = x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của w $\Leftrightarrow z^2 = w \Leftrightarrow (x + yi)^2 = a + bi$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = a + bi$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = a \\ 2xy = b \end{cases}.$$

Giải hệ phương trình này $\Rightarrow$ căn bậc hai của w.

Tìm các căn bậc hai của -5 + 3i, tức là tìm các số phức $x + yi\,(x, y \in \mathbb{R})$ sao cho $(x + yi)^2 = -5 + 3i$ nên ta cần giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 - y^2 = -5 \\ 2xy = 3 \end{cases}$.

Từ phương trình thứ hai ta có $y = \dfrac{3}{2x}$, thay vào phương trình thứ nhất ta được:

$$x^2 - \frac{9}{4x^2} = -5 \Leftrightarrow 4x^4 + 5x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -9 \end{array}\right. \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

Với $x = \pm 1$ thì $y = \pm\dfrac{3}{2}$.

Vậy có hai căn bậc hai của -5 + 3i là: $1 + \dfrac{3}{2}i$ và $-1 - \dfrac{3}{2}i$.

3.2. DẠNG 2: Phương trình bậc hai

Phương pháp: Việc giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$, trong đó a, b, c $(a \neq 0)$ là các số phức được tiến hành tương tự như với phương trình bậc hai với hệ số thực nhưng các phép tính ở đây (đặc biệt là phép lấy căn) là phép tính với các số phức.

Giải phương trình: $z^2 + 2z + 10 = 0$.

Giải:

Ta có: $\Delta' = 1 - 10 = -9 = 9i^2$

Vậy phương trình có hai nghiệm $z_1 = -1 + 3i$ và $z_2 = -1 - 3i$.

3.3. DẠNG 3: Phương trình quy về phương trình bậc hai và phương trình bậc cao

• ***Phương pháp 1: Phân tích đa thức thành nhân tử***

Giải phương trình: $z^3 - 8 = 0$.

Giải:

Ta có: $z^3 - 8 = 0 \Leftrightarrow (z-2)(z^2+2z+4) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2 \\ z^2 + 2z + 4 = 0 \end{array}\right.$ (1)

Giải phương trình $z^2 + 2z + 4 = 0$.

Ta có: $\Delta' = 1 - 4 = -3 = 3i^2$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm $z_1 = -1 + \sqrt{3}i$ và $z_2 = -1 - \sqrt{3}i$.

Từ (1) suy ra phương trình đã cho có 3 nghiệm là: $z = 2; z = -1 + \sqrt{3}i$ và $z = -1 - \sqrt{3}i$.

• ***Phương pháp 2: Phương pháp đặt ẩn phụ***

Giải phương trình: $(z^2 - z)^2 + 3(z^2 - z) - 4 = 0$.

Giải:

Đặt $t = z^2 - z$, phương trình đã cho trở thành:

$t^2 + 3t - 4 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t = 1 \\ t = -4 \end{array}\right.$.

+ Với t = 1 thì $z^2 - z = 1 \Leftrightarrow z^2 - z - 1 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{5}$.

+ Với t = -4 thì $z^2 - z = -4 \Leftrightarrow z^2 - z + 4 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \pm \sqrt{15}i$.

Vậy phương trình đã cho có 4 nghiệm là: $z = 1 \pm \sqrt{5}$ và $z = 1 \pm \sqrt{15}i$.

3.4. DẠNG 4: Giải hệ phương trình

Phương pháp: Dùng các phương pháp thế, khử, ... để giải hệ.

Ví dụ 8: Giải hệ phương trình: $\begin{cases} z + w = i \\ iz + w = 1 \end{cases}$.

Giải:

Hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} z + w = i \\ iz - z = 1 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = i - z \\ z(i-1) = 1 - i \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 1 - z \\ z = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} w = 2 \\ z = -1 \end{cases}$.

II BÀI TẬP

Tập hợp các căn bậc hai của số phức $z = 4 - 3i$ là:

(A) $\varnothing$;

(B) $\left\{-\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$;

(C) $\left\{\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$;

(D) $\left\{\dfrac{3\sqrt{2}}{2} - \dfrac{\sqrt{2}}{2}i; -\dfrac{3\sqrt{2}}{2} + \dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right\}$.

Giải:

Giả sử $x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ là căn bậc hai của z.

Khi đó, ta có: $(x+yi)^2=4-3i$

$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=4-3i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=4\\2xy=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=4\\y=-\dfrac{3}{2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\left(-\dfrac{3}{2x}\right)^2=4\\y=-\dfrac{3}{2x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}4x^4-16x^2-9=0\\y=-\dfrac{3}{2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=\dfrac{9}{2}\\x^2=-\dfrac{1}{2}\end{array}\right.\\y=-\dfrac{3}{2x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=\dfrac{9}{2}\\y=-\dfrac{3}{2x}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\y=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\\\begin{cases}x=-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\\y=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy z có 2 căn bậc hai là: $\dfrac{3\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i$ và $-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Dùng máy tình CASIO thử 3 đáp án B, C, D

Ví dụ: M CMPLX Math ▲ $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)^2$ $4-3i$ từ đó suy ra D là đáp án đúng.

Bài tập 2 Các căn bậc hai của số phức $z=-5-12i$ là:

(A) 2 – 3i và -2 + 3i; **(B)** 3 – 2i và -3 + 2i;

(C) 3 – 2i và -2 – 2i; **(D)** 2 – 3i và -2 – 3i.

Giải:

Giả sử $x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ là căn bậc hai của z.

Khi đó, ta có: $(x+yi)^2=-5-12i$

$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-5-12i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=-5\\2xy=-12\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\left(-\dfrac{6}{x}\right)^2=-5\\y=-\dfrac{6}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4+5x^2-36=0\\y=-\dfrac{6}{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ x^2 = -9 \end{array}\right. \\ y = -\dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ y = -\dfrac{6}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy z có hai căn bậc hai là: $2-3i$ và $-2+3i \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Sử dụng máy tính CASIO tìm căn bậc 2 của số phức

Ở phần dạng lượng giác của số phức ta có $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

Áp dụng công thức Moa-vro ta có z có 2 căn bậc 2 là $\pm\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$

Nhập $\sqrt{|-5-12i|}\angle\dfrac{\arg(-5-12i)}{2}$ ta được kết quả bằng $2-3i$

Vậy căn bậc 2 của số phức cần tìm là $\pm(2-3i)$

Ở đây $\sqrt{|-5-12i|} = \sqrt{r}$ và $\dfrac{\arg(-5-12i)}{2}$ chính là phần $\cos\dfrac{\varphi}{2} + i\sin\dfrac{\varphi}{2}$

Chú ý: $\angle$: Nhấn tổ hợp 2 phím SHIFT và $(-)$. Arg nhấn SHIFT 2 1

Cho số phức $z = -8+6i$. Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG trong các khẳng định dưới đây?

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

(a) Số phức z có hai căn bậc hai.

(b) Số phức z không có căn bậc hai.

(c) 1 + 3i là căn bậc hai của số phức z.

(d) -1 - 3i là căn bậc hai của số phức z.

Giải:

Giả sử $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của z.

Khi đó, ta có: $(x+yi)^2 = -8+6i$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -8+6i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -8 \\ 2xy = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\dfrac{3}{x}\right)^2 = -8 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 8x^2 - 9 = 0 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -9 \end{array}\right. \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{3}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -3 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy số phức z có hai căn bậc hai là: $1+3i$ và $-1-3i$.

$\Rightarrow$ (B) sai; (A), (C) và (D) đúng $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

$$\sqrt{|-8+6i|}\angle\frac{\arg(-8+6i)}{2}=1-3i\Rightarrow 2 \text{ căn bậc 2 của } z \text{ là } \pm(1-3i)$$

Cho số phức z = 9 + 40i. Xét các khẳng định sau:

(a) Số phức z có hai căn bậc hai.

(b) z = -5 + 4i là một căn bậc hai của số phức z.

(c) z = 5 – 4i là một căn bậc hai của số phức z.

Các khẳng định ĐÚNG là:

(A) (a) và (c); **(B)** (c); **(C)** (b) và (c); **(D)** (a) và (b).

Giải:

Giả sử $x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ là căn bậc hai của z.

Khi đó, ta có: $(x+yi)^2=9+40i$

$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=9+40i$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-y^2=9\\2xy=40\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2-\left(\dfrac{20}{x}\right)^2=9\\y=\dfrac{20}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^4-9x^2-400=0\\y=\dfrac{20}{x}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}\left[\begin{array}{l}x^2=25\\x^2=-16\end{array}\right.\\y=\dfrac{20}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x^2=25\\y=\dfrac{20}{x}\end{cases}\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x=5\\y=4\end{cases}\\\begin{cases}x=-5\\y=-4\end{cases}\end{array}\right..$$

Vậy số phức z có hai căn bậc hai là: $z=5+4i$ và $z=-5-4i\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

$$\sqrt{|9+40i|}\angle\frac{\arg(9+40i)}{2}=5+4i\Rightarrow 2 \text{ căn bậc 2 của } z \text{ là } \pm(5+4i)$$

Gọi ω là căn bậc hai của số phức $z=3-6\sqrt{6}i$. Khi đó:

(A) $\omega=3-\sqrt{6}i$; **(B)** $\omega=-3-\sqrt{6}i$;

(C) $\omega=3-\sqrt{6}i$ hoặc $\omega=-3+\sqrt{6}i$; **(D)** $\omega=3-\sqrt{6}i$ hoặc $\omega=-3-\sqrt{6}i$;

Giải:

Giả sử $x+yi\ (x,y\in\mathbb{R})$ là căn bậc hai của z.

Khi đó, ta có: $(x+yi)^2=3-6\sqrt{6}i$

$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=3-6\sqrt{6}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-6\sqrt{6} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\left(-\dfrac{3\sqrt{6}}{x}\right)^2=3 \\ y=-\dfrac{3\sqrt{6}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4-3x^2-54=0 \\ y=-\dfrac{3\sqrt{6}}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2=9 \\ x^2=-6 \end{array}\right. \\ y=-\dfrac{3\sqrt{6}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=9 \\ y=-\dfrac{3\sqrt{6}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x=3 \\ y=-\sqrt{6} \end{cases} \\ \begin{cases} x=-3 \\ y=\sqrt{6} \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy số phức z có hai căn bậc hai là: $3-\sqrt{6}i$ và $-3+\sqrt{6}i \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

$$\sqrt{\left|3-6\sqrt{6}i\right|}\angle\frac{\arg\left(3-6\sqrt{6}i\right)}{2}=3-2,4494897i \Rightarrow 2 \text{ căn bậc 2 của } z \text{ là } \pm\left(3-2,4494897i\right).$$

Tập hợp các căn bậc hai của số phức $z=-14-8\sqrt{2}i$ là:

(A) $\left\{\sqrt{2}-2i;-\sqrt{2}-2i\right\}$; **(B)** $\left\{\sqrt{2}-2i;-\sqrt{2}+2i\right\}$;

(C) $\left\{\sqrt{2}-2i\right\}$; **(D)** $\left\{\sqrt{2}+2i\right\}$.

Giải:

Giả sử $x+yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của z.

Khi đó, ta có: $(x+yi)^2=-14-8\sqrt{2}i$

$\Leftrightarrow x^2-y^2+2xyi=-14-8\sqrt{2}i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=-14 \\ 2xy=-8\sqrt{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-\left(-\dfrac{4\sqrt{2}}{x}\right)^2=-14 \\ y=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+14x^2-32=0 \\ y=-\dfrac{4\sqrt{2}}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2=-16 \\ x^2=2 \end{array}\right. \\ y=\dfrac{-4\sqrt{2}}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=\sqrt{2}; y=-2 \\ x=-\sqrt{2}; y=2 \end{array}\right.$$

Vậy số phức z có hai căn bậc hai là: $\sqrt{2}-4i$ và $-\sqrt{2}+4i$ **Chọn (B).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

$$\sqrt{\left|-14-8\sqrt{2}i\right|}\angle\frac{\arg\left(-14-8\sqrt{2}i\right)}{2}=\sqrt{2}-4i \Rightarrow 2 \text{ căn bậc 2 của } z \text{ là } \pm\left(\sqrt{2}-4i\right)$$

Bài tập 7 Xét các khẳng định sau:

(a) Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc hai đều có hai nghiệm phân biệt.

(b) Trên tập hợp số phức, mọi phương trình bậc hai đều có hai nghiệm (không nhất thiết phân biệt).

(c) Mọi phương trình bậc n $(n \geq 1)$

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$

Trong đó $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0$ đều có n nghiệm phức (các nghiệm không nhất thiết phân biệt).

(d) Mọi phương trình bậc n $(n \geq 1)$

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_{n-1}x + a_n = 0,$

Trong đó $a_0, a_1, ..., a_n \in \mathbb{C}, a_0 \neq 0$ đều có n nghiệm phức phân biệt.

Số khẳng định ĐÚNG là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Các khẳng định đúng là: (b) và (c); các khẳng định sai là: (a) và (d) (Nhận xét sách giáo khoa).

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 8 Tập hợp các nghiệm phức của phương trình $3z^2 + 2z + 1 = 0$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $\mathbb{R}$;

(C) $\left\{\frac{-1+\sqrt{2}i}{3}; \frac{-1-\sqrt{2}i}{3}\right\}$; **(D)** $\left\{\frac{1+\sqrt{2}i}{3}; \frac{1-\sqrt{2}i}{3}\right\}$.

Giải:

Ta có: $\Delta' = 1 - 3 = -2 = 2i^2$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có hai nghiệm là: $z = \frac{-1+\sqrt{2}i}{3}$ và $z = \frac{-1-\sqrt{2}i}{3}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Nhận xét: Bấm máy tính giải PT bình thường vì trong PT này không chứa *i*.

Bài tập 9 Tập hợp các nghiệm phức của phương trình $z^2 - (4i-1)z - 3 - 3i = 0$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $\mathbb{R}$; **(C)** $\{6i; 2i-2\}$; **(D)** $\{3i; i-1\}$.

Giải:

Ta có: $\Delta = (4i-1)^2 + 4(3+3i) = 16i^2 - 8i + 1 + 12 + 12i = 4i - 3.$

Giả sử $x + yi$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là căn bậc hai của Δ.

Ta có: $(x+yi)^2 = 4i-3$

$\Leftrightarrow x^2 - y^2 + 2xyi = -3+4i$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = -3 \\ 2xy = 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - \left(\dfrac{2}{x}\right)^2 = -3 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 + 3x^2 - 4 = 0 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = 1 \\ x^2 = -4 \end{array}\right. \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 1 \\ y = \dfrac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 1 \\ y = 2 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -1 \\ y = -2 \end{cases} \end{array}\right..$$

Do đó 1 + 2i và $-1-2i$ là hai căn bậc hai của Δ

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho có 2 nghiệm là:

$z_1 = \dfrac{4i-1+2i+1}{2} = 3i; z_2 = \dfrac{4i-1-2i-1}{2} = i-1 \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập PT $z^2 - (4i-1)z - 3 - 3i = 0$ sau đó CALC các nghiệm trong các phương án ở các đáp án C và D. Chọn D.

Bài tập 10 Cho phương trình $(3+i)z^2 - (7i+2)z + 2i + 1 = 0$. Mệnh đề nào dưới đây là ĐÚNG?

(A) Phương trình không có nghiệm phức.

(B) $z = \dfrac{3}{5} - \dfrac{1}{5}i$ là nghiệm của phương trình.

(C) $z = 2+4i$ là nghiệm của phương trình.

(D) Phương trình có hai nghiệm là $z = \dfrac{3}{10} - \dfrac{1}{10}i$ và $z = 1+2i$.

Giải:

Ta có: $\Delta = (7i+2)^2 - 4(3+i)(2i+1) = 49i^2 + 28i + 4 - 4(2i^2 + 7i + 3) = -49 = 49i^2$

Phương trình có 2 nghiệm là:

$$z_1 = \frac{7i+2-7i}{2(3+i)} = \frac{1}{3+i} = \frac{3-i}{(3+i)(3-i)} = \frac{3-i}{9+i^2} = \frac{3-i}{10} = \frac{3}{10} - \frac{1}{10}i$$

$$z_2 = \frac{7i+2+7i}{2(3+i)} = \frac{14i+2}{2(3+i)} = \frac{7i+1}{3+i} = \frac{(7i+1)(3-i)}{(3+i)(3-i)} = \frac{21i - 7i^2 + 3 - i}{9-i^2} = \frac{10+20i}{10} = 1+2i.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập PT $(3+i)z^2 - (7i+2)z + 2i + 1 = 0.$ sau đó CALC các nghiệm trong các phương án ở các đáp án B, C và D. Chọn D.

Cho phương trình $z^2-(\cos\alpha+i\sin 3\alpha)z+i\cos\alpha\sin 3\alpha=0$. Khẳng định nào sau đây là SAI?

(A) Phương trình có hai nghiệm phức.

(B) Hai nghiệm phức của phương trình đều có môđun nhỏ hơn hoặc bằng 1.

(C) Phương trình có ít nhất một nghiệm thực.

(D) Phương trình có hai nghiệm thuần ảo.

Giải:

Gọi z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình. Theo Định lí Viet ta có:

$$\begin{cases} z_1+z_2=\cos\alpha+i\sin 3\alpha \\ z_1z_2=\cos\alpha.i\sin 3\alpha \end{cases}.$$

Vậy 2 nghiệm của phương trình đã cho là: $z_1=\cos\alpha; z_2=i\sin 3\alpha \Rightarrow$ (A), (C) đúng; (D) sai.

Ta có: $|z_1|=|\cos\alpha|\le 1, |z_2|=|i\sin 3\alpha|=|\sin 3\alpha|\le 1 \Rightarrow$ (B) đúng.

Chọn (D).

Lưu ý: Việc sử dụng trực tiếp Định lí Viet để tính nghiệm tỏ ra hiệu quả, sẽ rắc rối hơn nếu ta tính Δ nên việc tinh ý lựa chọn cách giải sẽ giúp đơn giản hóa bài toán.

Cho z_1, z_2 là hai nghiệm phức của phương trình: $z^2-2z+4=0$. Tính $|z_1-z_2|$.

(A) Không tồn tại; **(B)** $2\sqrt{3}$; **(C)** $4\sqrt{3}$; **(D)** $\sqrt{3}$.

Giải:

Ta có: $\Delta'=1-4=-3=3i^2$

$\Rightarrow z_1=1+\sqrt{3}i; z_2=1-\sqrt{3}i.$

$\Rightarrow |z_1-z_2|=|2\sqrt{3}i|=2\sqrt{3} \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Cho z_1, z_2 là hai nghiệm của phương trình $z^2+2z+10=0$. Tính giá trị của biểu thức $A=|z_1|^2+|z_2|^2$.

(A) 20; **(B)** $2\sqrt{5}$; **(C)** 2; **(D)** 40.

Giải:

Xét phương trình $z^2+2z+10=0$.

Ta có: $\Delta=-36=36i^2$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm là: $z_1=\dfrac{-2-6i}{2}=-1-3i$ và $z_2=\dfrac{-2+6i}{2}=-1+3i$.

Do đó, ta có: $A=\left[\sqrt{(-1)^2+(-3)^2}\right]^2+\left[\sqrt{(-1)^2+3^2}\right]=20 \Rightarrow$ **Chọn (A).**

[Đề thi THPTQG minh họa 2017]

Kí hiệu z_1, z_2, z_3 và z_4 là bốn nghiệm của phương trình $z^4 - z^2 - 12 = 0$. Tính tổng $T = |z_1| + |z_2| + |z_3| + |z_4|$.

(A) $T = 4$; **(B)** $T = 2\sqrt{3}$; **(C)** $T = 4 + 2\sqrt{3}$; **(D)** $T = 2 + 2\sqrt{3}$.

Giải:

Ta có: $z^4 - z^2 - 12 = 0 \Leftrightarrow (z^2 - 4)(z^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 - 4 \\ z^2 = -3 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm 2 \\ z = \pm\sqrt{3}i \end{array}\right.$.

Khi đó: $T = |2| + |-2| + |\sqrt{3}i| + |-\sqrt{3}i| = 4 + 2\sqrt{3} \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Tập nghiệm phức của phương trình $(z - i)^2 + 4 = 0$ là:

(A) $\varnothing$; **(B)** $\{3i\}$; **(C)** $\{-i\}$; **(D)** $\{-i; 3i\}$.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow (z - i)^2 - (2i)^2 = 0 \Leftrightarrow (z - i - 2i)(z - i + 2i) = 0$

$\Leftrightarrow (z - 3i)(z + i) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z - 3i = 0 \\ z + i = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 3i \\ z = -i \end{array}\right. \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Số nghiệm phức của phương trình $z^4 + 7z^2 + 10 = 0$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 4.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow (z^4 + 2z^2) + (5z^2 + 10) = 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 + 2) + 5(z^2 + 2) = 0$

$\Leftrightarrow (z^2 + 2)(z^2 + 5) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 + 2 = 0 \\ z^2 + 5 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 - (\sqrt{2}i)^2 = 0 \\ z^2 - (\sqrt{5}i)^2 = 0 \end{array}\right.$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} (z - \sqrt{2}i)(z + \sqrt{2}i) = 0 \\ (z - \sqrt{5}i)(z + \sqrt{5}i) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\sqrt{2}i \\ z = \pm\sqrt{5}i \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Số nghiệm phức của phương trình $z^4 + z^2 - 6 = 0$ là:

(A) 1; **(B)** 4; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow (z^4 + 3z^2) - (2z^2 + 6) = 0 \Leftrightarrow z^2(z^2 + 3) - 2(z^2 + 3)$

$\Leftrightarrow (z^2 - 2)(z^2 + 3) = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 - 2 = 0 \\ z^2 + 3 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\sqrt{2} \\ z^2 - (\sqrt{3}i)^2 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = \pm\sqrt{2} \\ z = \pm\sqrt{3}i \end{array}\right.$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 18 Cho phương trình $(z+i)^4+4z^2=0$. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG?

(A) Phương trình có 4 nghiệm thuần ảo.

(B) Phương trình có 4 nghiệm thực.

(C) Phương trình có 2 nghiệm thực đối nhau.

(D) Phương trình có 2 nghiệm phân biệt.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow \left[(z+i)^2\right]^2-(2iz)^2=0 \Leftrightarrow \left[(z+i)^2-2iz\right]\left[(z+i)^2+2iz\right]=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(z+i)^2-2iz=0\\(z+i)^2+2iz=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z^2+i^2=0\\z^2+4iz+i^2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z^2-1=0\\z^2+4iz-1=0\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=\pm 1\\z=\left(-2\pm\sqrt{3}\right)i\end{array}\right..$$

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 19 Tập hợp các nghiệm phức của phương trình $z^3=64$ là:

(A) $\varnothing$;

(B) $\left\{2-2\sqrt{3}i;2+2\sqrt{3}i\right\}$;

(C) $\left\{-2+2\sqrt{3}i;-2-2\sqrt{3}i\right\}$;

(D) $\left\{4;-2+2\sqrt{3}i;-2-2\sqrt{3}i\right\}$.

Giải:

Ta có: $z^3=64 \Leftrightarrow z^3-4^3=0 \Leftrightarrow (z-4)\left(z^2+4z+16\right)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=4\\z^2+4z+16=0\end{array}\right.$$

Giải phương trình: $z^2+4z+16=0$.

Ta có: $\Delta'=4-16=-12=12i^2$

$\Rightarrow$ Phương trình có 2 nghiệm là: $z_1=-2+2\sqrt{3}i$ và $z_2=-2-2\sqrt{3}i$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm: $z=4; z=-2+2\sqrt{3}i$ và $z=-2-2\sqrt{3}i$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Có thể bấm máy tính giải PT bậc 3 bình thường ta được nghiệm của PT đã cho.

Bài tập 20 Số nghiệm phức của phương trình $(z+1)^2+\left(z^2+5z+4\right)^2=0$ là:

(A) 1; **(B)** 2; **(C)** 3; **(D)** 4.

Giải:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (z+1)^2+(z+1)^2(z+4)^2=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2\left[1+(z+4)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow (z+1)^2(z^2+8z+17)=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}(z+1)^2=0\\ z^2+8z+17=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=-1\\ z=-4\pm i\end{array}\right.$.

Vậy phương trình đã cho có 3 nghiệm là: z = -1; z = -4 + i và z = -4 – i.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Cho số phức z thỏa mãn $z^2-2(1+i)z+2i=0$. Khẳng định nào sau đây là ĐÚNG về số phức $\frac{1}{z}$?

(A) Phần thực của $\frac{1}{z}$ là $-\frac{1}{2}$.

(B) Phần ảo của $\frac{1}{z}$ là $\frac{1}{2}$.

(C) Phần thực và phần ảo của $\frac{1}{z}$ là nghịch đảo của nhau.

(D) Phần thực và phần ảo của $\frac{1}{z}$ là hai số đối nhau.

Giải:

Ta có: $z^2-2(1+i)z+2i=0 \Leftrightarrow z^2-2(1+i)z+(1+i)^2=0 \Leftrightarrow [z-(1+i)]^2=0$

$\Leftrightarrow z=1+i \Rightarrow \frac{1}{z}=\frac{1}{1+i}=\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1-i}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i.$

Vạy phần thực của $\frac{1}{z}$ là $\frac{1}{2}$ và phần ảo của $\frac{1}{z}$ là $-\frac{1}{2}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tìm các số thực a, b để phương trình $z^2+az+b=0$ có một nghiệm là $z=2-i$, trong đó i là đơn vị ảo của tập số phức.

(A) a = -4 và b = 5;

(C) a = 5 và b = -4;

(C) a = 8 và b = 12;

(D) Không có giá trị của a và b.

Giải:

$z=2-i$ là một nghiệm của phương trình đã cho $\Leftrightarrow (2-i)^2+a(2-i)+b=0$

$\Leftrightarrow 4-4i+i^2+2a-ai+b=0$

$\Leftrightarrow 2a+b+3-(a+4)=0$

$\Leftrightarrow \begin{cases}2a+b+3=0\\ a+4=0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}b=5\\ a=-4\end{cases}$.

Vậy a = -4 và b = 5 cần tìm $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Tập nghiệm phức của phương trình $z^3+2z^2+2z-20=0$ là:

(A) $\left\{-2\pm\sqrt{6}i\right\}$; (B) $\left\{2;-2-\sqrt{6}i\right\}$; (C) $\left\{2;-2+\sqrt{6}i\right\}$; (D) $\left\{2;-2\pm\sqrt{6}i\right\}$.

Giải:

Ta có: $z^3+2z^2+2z-20=(z-2)\left(z^2+az+b\right)$

$\Leftrightarrow z^3+2z^2+2z-20=z^3+(a-2)z^2+(b-2a)z-2b=0$

Đồng nhất đẳng thức ta được: $\begin{cases}a-2=2\\ b-2a=2\\ -2b=-20\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a=4\\ b=10\end{cases}$.

Vậy a = 4; b = 10.

$\Rightarrow z^3+2z^2+2z-20=0\Leftrightarrow(z-2)\left(z^2+4z+10\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2\\ z^2+4z+10=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=2\\ z=-2\pm\sqrt{6}i\end{array}\right.$.

Vậy tập nghiệm phức của phương trình đã cho là $\left\{2;-2\pm\sqrt{6}i\right\}\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Nhận xét: Có thể bấm máy tính giải phương trình bậc 3 bình thường.

Tìm tập nghiệm của phương trình $2z^3-5z^2+3z+3+(2z+1)i=0$, biết phương trình có nghiệm thực.

(A) $\left\{-\frac{1}{2}\right\}$; (B) $\left\{-\frac{1}{2};4-2i\right\}$; (C) $\left\{-\frac{1}{2};2+2i\right\}$; (D) $\left\{-\frac{1}{2};2-i;1+i\right\}$.

Giải:

Vì phương trình có nghiệm thực nên $\begin{cases}2z^3-5z^2+3z+3=0\\ 2z+1=0\end{cases}\Leftrightarrow z=-\frac{1}{2}$

Do đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow(2z+1)\left(z^2-3z+3+i\right)=0$

$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}2z+1=0\\ z^2-3z+3+i=0\end{array}\right.\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-\frac{1}{2}\\ z=2-i\\ z=1+i\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $z=-\frac{1}{2};z=2-i$ và $z=1+i$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Trong việc giải phương trình bậc cao, nếu đề cho biết phương trình có nghiệm 1 nghiệm thực thì đưa phương trình về dạng $f(z)+ig(z)=0\Rightarrow\begin{cases}f(z)=0\\ g(z)=0\end{cases}$ hoặc sử dụng khả năng nhẩm nghiệm sao cho triệt tiêu đi i.

Tìm tập nghiệm của phương trình: $z^3-2(1+i)z^2+4(1+i)z-8i=0$, biết phương trình có nghiệm thuần ảo.

(A) $\{3i\}$; **(B)** $\{3i;2i\}$; **(C)** $\{\pm 3i;2i\}$; **(D)** $\{2i;\pm\sqrt{3}i\}$.

Giải:

Vì phương trình đã cho có nghiệm thuần ảo nên giả sử $z=bi$ là nghiệm của phương trình

$$\Rightarrow (bi)^3-2(1+i)(bi)^2+4(1+i)(bi)-8i=0$$

$$\Leftrightarrow (2b^2-4b)+(-b^3+2b^2+4b-8)i=0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases}2b^2-4b=0\\ -b^3+2b^2+4b-8=0\end{cases} \Leftrightarrow b=2$$

$\Rightarrow z=2i$ là nghiệm của phương trình.

Do đó, phương trình đã cho $\Leftrightarrow (z-\sqrt{3}i)(z+\sqrt{3}i)(z-2i)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=2i\\ z=\sqrt{3}i\\ z=-\sqrt{3}i\end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $z=2i$; $z=\pm\sqrt{3}i$.

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý:

1. Trong việc giải phương trình bậc cao, nếu đề cho phương trình có nghiệm thuần ảo thì ta thế $z=bi$ vào phương trình và giải tìm $b \Rightarrow z=bi$. Do có nghiệm $z=bi$ nên sử dụng phép chia đa thức để đưa về phương trình bậc thấp hơn đã biết cách giải để tìm các nghiệm còn lại.

2. Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập PT $z^3-2(1+i)z^2+4(1+i)z-8i=0$, sau đó CALC các nghiệm trong các phương án ở các đáp án B, C và D. Chọn D.

Cho z_1,z_2,z_3,z_4 là bốn nghiệm của phương trình: $z^4-z^3-2z^2+6z-4=0$ trên tập số phức. Tính tổng: $T=\frac{1}{z_1^2}+\frac{1}{z_2^2}+\frac{1}{z_3^2}+\frac{1}{z_4^2}$.

(A) $\frac{5}{4}+\frac{1}{i}$; **(B)** $\frac{5}{4}$; **(C)** $\frac{13}{4}$; **(D)** $\frac{9}{4}$.

Giải:

Ta có: $z^4-z^3-2z^2+6z-4=0 \Leftrightarrow (z-1)(z+2)(z^2-2z+2)=0$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1\\ z=-2\\ z^2-2z+2=0\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}z=1\\ z=-2\\ z=1+i\\ z=1-i\end{array}\right.$$

Không mất tính tổng quát, giả sử $z_1 = 1; z_2 = -2; z_2 = 1+i; z_4 = 1-i$.

Ta có: $T = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1-i)^2} = \frac{5}{4} + \frac{1}{2i} - \frac{1}{2i} = \frac{5}{4} \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 27 Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} z_1^2 + z_2^2 = -4-2i \\ z_1 + z_2 = 1+i \end{cases}$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Ta có: $z_1^2 + z_2^2 = (z_1+z_2)^2 - 2z_1z_2 \Leftrightarrow -4-2i = (1+i)^2 - 2z_1z_2 \Leftrightarrow z_1z_2 = 2+2i$.

Hệ đã cho trở thành: $\begin{cases} z_1 + z_2 = 1+i \\ z_1z_2 = 2+2i \end{cases}$.

$\Rightarrow z_1, z_2$ là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - (1+i)z + 2 + 2i = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2i \\ z = 1-i \end{array}\right.$.

Vậy $\begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = 1-i \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} z_1 = 1-i \\ z_2 = 2i \end{cases}$ là nghiệm của hệ phương trình đã cho $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Cần nhớ lại: Nếu $z_1 + z_2 = S$ và $z_1z_2 = P$ thì z_1, z_2 là 2 nghiệm của phương trình $t^2 - St + P = 0$.

Bài tập 28 Phương trình $z^5 + 2z^4 + z^3 + 2z^2 + z + 2 = 0$

(A) có nhiều hơn 1 nghiệm thực.

(B) có duy nhất 1 nghiệm.

(C) Mô đun của các nghiệm không vượt quá 2.

(D) có 4 nghiệm phức phân biệt.

Giải:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow z^4(z+2) + z^2(z+2) + (z+2) = 0$

$\Leftrightarrow (z+2)(z^4 + z^2 + 1) = 0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z+2 = 0 \\ z^4 + z^2 + 1 = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = -2 \\ z^4 + z^2 + 1 = 0 \end{array}\right.$.

Giải phương trình: $z^4 + z^2 + 1 = 0$.

Ta có: $z^4 + z^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow z^2 = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z^2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3} \\ z^2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i = \cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right) \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} \\ z=-\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3} \\ z=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \\ z=-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)-i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \end{array}\right. \Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i \\ z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \end{array}\right.$$

Vậy phương trình đã cho có các nghiệm là:

$z=2; z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i; z=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i; z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i; z=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i \Rightarrow$ (A), (B), (D) sai.

Ta có: $\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\left|-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=\left|\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=-\left|\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right|=1<2 \Rightarrow$ (C) đúng.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 9 Tập nghiệm của phương trình $z^4-z^3+\frac{z^2}{2}+z+1=0\ (z\in\mathbb{C})$ là:

(A) $\left\{1+i;1-i;\frac{i-1}{2};\frac{-i-1}{2}\right\}$;

(B) $\left\{1+i;-1-i;\frac{i-1}{2};\frac{i+1}{2}\right\}$;

(C) $\left\{-1-i;1-i;\frac{i-1}{2};\frac{i+1}{2}\right\}$;

(D) $\left\{-1+i;1-i;\frac{i-1}{2};\frac{i+1}{2}\right\}$.

Giải:

Ta thấy z = 0 không phải là nghiệm của phương trình nên chia cả 2 vế của phương trình cho z^2, ta được:

$$\left(z^2+\frac{1}{z^2}\right)-\left(z-\frac{1}{z}\right)+\frac{1}{2}=0 \qquad (1)$$

Đặt $t=z-\frac{1}{z}$. Khi đó phương trình (1) trở thành: $t^2-t+\frac{5}{2}=0$ (2)

Ta có: $\Delta=1-4.\frac{5}{2}=-9=9i^2$

Vậy phương trình (2) có 2 nghiệm: $t=\frac{1+3i}{2}$ và $t=\frac{1-3i}{2}$.

+ Với $t=\frac{1+3i}{2}$ thì $z-\frac{1}{z}=\frac{1+3i}{2}\Leftrightarrow 2z^2-(1+3i)z-2=0$ (3)

Ta có: $\Delta=(1+3i)^2+16=8+6i=9+6i+i^2=(3+i)^2$

Do đó, phương trình (3) có 2 nghiệm: $z=\frac{1+3i+3+i}{4}=1+i$ và $z=\frac{1+3i-(3+i)}{4}=\frac{i-1}{2}$.

+ Với $t=\dfrac{1-3i}{2}$ thì $z-\dfrac{1}{z}=\dfrac{1-3i}{2}\Leftrightarrow 2z^2-(1-3i)z-2=0$ (4)

Ta có: $\Delta=(1-3i)^2+16=8-6i=9-6i+i^2=(3-i)^2$

Do đó, phương trình (4) có 2 nghiệm: $z=\dfrac{1-3i+3-i}{4}=1-i$ và $z=\dfrac{1-3i-(3-i)}{4}=\dfrac{-1-i}{2}$

Do đó phương trình đã cho có 4 nghiệm: $z=1+i; z=1-i; z=\dfrac{i-1}{2}; z=\dfrac{-i-1}{2}\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Phương trình $(z^2-z)(z+3)(z+2)=10$

(A) Có hai nghiệm thực và hai nghiệm phức.

(B) Có bốn nghiệm phức, trong đó có hai nghiệm thực.

(C) Có hai nghiệm phức phân biệt.

(D) Có hai nghiệm thực đối nhau.

Giải:

Phương trình $\Leftrightarrow z(z-1)(z+3)(z+2)=10$

$\Leftrightarrow z(z+2)(z-1)(z+3)=10$

$\Leftrightarrow (z^2+2z)(z^2+2z-3)=10$

Đặt $t=z^2+2z$. Khi đó phương trình trở thành: $t(t-3)=10$

$\Leftrightarrow t^2-3t-10=0\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-2 \\ t=5 \end{array}\right.$.

+ Với t = -2 thì $z^2+2z=-2\Leftrightarrow z^2+2z+2=0\Leftrightarrow z=-1\pm i$

+ Với t = 5 thì $z^2+2z=5\Leftrightarrow z^2+2z-5=0\Leftrightarrow z=-1\pm\sqrt{6}$.

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $z=-1\pm i; z=-1\pm\sqrt{6}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Tập nghiệm của phương trình $(z^2+3z+2)(z^2+11z+30)=60$ trên tập hợp số phức là:

(A) $\left\{-\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right\}$;

(B) $\left\{\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right\}$;

(C) $\left\{0;7;-\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right\}$;

(D) $\left\{0;-7;-\dfrac{7}{2}\pm\dfrac{\sqrt{15}}{2}i\right\}$.

Giải:

Phương trình đã cho $\Leftrightarrow (z+1)(z+2)(z+5)(z+6)=60$

$\Leftrightarrow (z+1)(z+6)(z+2)(z+5)=60$

$\Leftrightarrow (z^2+7z+6)(z^2+7z+10)=60$

Đặt $z^2+7z+8=t$. Khi đó phương trình đã cho trở thành: $(t-2)(t+2)=60$

$\Leftrightarrow t^2-4=60 \Leftrightarrow t^2=64 \Leftrightarrow t=\pm 8.$

+ Với t = 8 thì $z^2+7z+8=8 \Leftrightarrow z^2+7z=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=0 \\ z=-7 \end{array}\right.$.

+ Với t = -8 thì $z^2+7z+8=-8 \Leftrightarrow z^2+7z+16=0 \Leftrightarrow z=-\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i.$

Vậy nghiệm của phương trình đã cho là: $z=0; z=-7; z=-\frac{7}{2}\pm\frac{\sqrt{15}}{2}i \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} z_1+z_2+z_3=1 \\ z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1=1 \\ z_1z_2z_3=1 \end{cases}$ trên tập số phức là:

(A) 1; **(B)** 3; **(C)** 6; **(D)** 4.

Giải:

Ta có z_1, z_2, z_3 là các nghiệm của phương trình: $(z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)=0$

$\Leftrightarrow z^3-(z_1+z_2+z_3)z^2+(z_1z_2+z_2z_3+z_3z_1)z-z_1z_2z_3=0$

$\Leftrightarrow z^3-z^2+z-1=0$

$\Leftrightarrow z^2(z-1)+(z-1)=0 \Leftrightarrow (z-1)(z^2+1)=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z^2=-1 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1 \\ z=\pm i \end{array}\right.$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là $(1;i;-i)$ và các hoán vị $\Rightarrow$ có 6 nghiệm

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Số nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} x+\dfrac{3x-y}{x^2+y^2}=3 \\ y-\dfrac{x+3y}{x^2+y^2}=0 \end{cases}$ $(x, y \in \mathbb{R})$ là:

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

Giải:

Vì $x, y \in \mathbb{R}$ nên hệ phương trình đã cho $\Leftrightarrow x+\frac{3x-y}{x^2+y^2}+\left(y-\frac{x+3y}{x^2+y^2}\right)i=3$

$\Leftrightarrow x+yi+\frac{(3x-y)-(x+3y)i}{x^2+y^2}=3 \Leftrightarrow x+yi+\frac{3(x-yi)}{x^2+y^2}-\frac{i(x-yi)}{x^2+y^2}=3$

Đặt $z=x+yi$, ta được phương trình: $z+\frac{(3-i)\overline{z}}{|z|^2}=3 \Leftrightarrow z+\frac{3-i}{z}=3$

$\Leftrightarrow z^2-3z+3-i=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=2+i \\ z=1-i \end{array}\right.$.

+ Với z = 2 + i thì $x+yi=2+i \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$.

+ Với $z=1-i$ thì $x+yi=1-i \Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases}$.

Vậy nghiệm của hệ phương trình đã cho là: $(x;y)\in\{(2;1);(1;-1)\} \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Chú ý: Trên đây ta đã sử dụng tính chất bằng nhau của hai số phức:

$A+Bi=A'+B'i \Leftrightarrow \begin{cases} A=A' \\ B=B' \end{cases}$ để giải hệ phương trình.

Thêm 1 bài tập nữa cho việc áp dụng tính chất này để giải hệ phương trình.

Bài tập 34 Tập nghiệm của hệ phương trình $\begin{cases} 8x^3-6xy^2-12x^2+3y^2+6x+1=0 \\ 12x^2y-12xy+3y-y^3+2=0 \end{cases}$ $(x,y\in\mathbb{R})$ là:

(A) $\left\{\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{4};\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right);\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4};\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$; **(B)** $\left\{\left(\dfrac{2-\sqrt{3}}{4};\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$;

(C) $\left\{\left(\dfrac{1-\sqrt{3}}{4};\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}\right);\left(\dfrac{1+\sqrt{3}}{4};\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$; **(D)** $\left\{\left(\dfrac{2+\sqrt{3}}{4};\dfrac{2+\sqrt{3}}{2}\right)\right\}$.

Giải:

Vì $x,y\in\mathbb{R}$ nên hệ đã cho

$\Leftrightarrow 8x^3-6xy^2-12x^2+3y^2+6x+1+\left(12x^2y-12xy+3y-y^3+2\right)i=0$

$\Leftrightarrow 8x^3+12x^2yi-6xy^2-y^3i-12x^2-12xyi+3y^2+6x+3yi-1=-2-2i$

$\Leftrightarrow (2x)^3+3.(2x)^2yi+3.(2x)(yi)^2+(yi)^3-3\left(4x^2+4xyi-y^2\right)+3(2x+yi)-1$

$=1-3i+3i^2-i^3$

$\Leftrightarrow (2x+yi)^3-3(2x+yi)^2+3(2x+yi)-1=(1-i)^3$

$\Leftrightarrow (2x+yi-1)^3-(1+i)^3=0$

Đặt $z=2x+yi-1 \Rightarrow z^3-(1-i)^3=0$

$\Leftrightarrow (z-1+i)\left[z^2+z(1-i)+(1-i)^2\right]=0$

$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z=1-i \\ z^2+z(1-i)+(1-i)^2=0 \end{array}\right.$

Giải phương trình: $z^2+z(1-i)+(1-i)^2=0$.

Ta có: $z^2+z(1-i)+(1-i)^2=0 \Leftrightarrow \left(z+\dfrac{1-i}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}(1-i)^2=0$

$\Leftrightarrow \left(z+\dfrac{1-i}{2}\right)^2-\left[\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-i)\right]^2 i^2=0$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{1-i}{2}\right)-\left[\frac{\sqrt{3}}{2}(1+i)\right]^2=0$$

$$\Leftrightarrow\left(z+\frac{1-i}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(z+\frac{1-i}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=0$$

$$\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}z=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\\ z=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\end{array}\right.$$

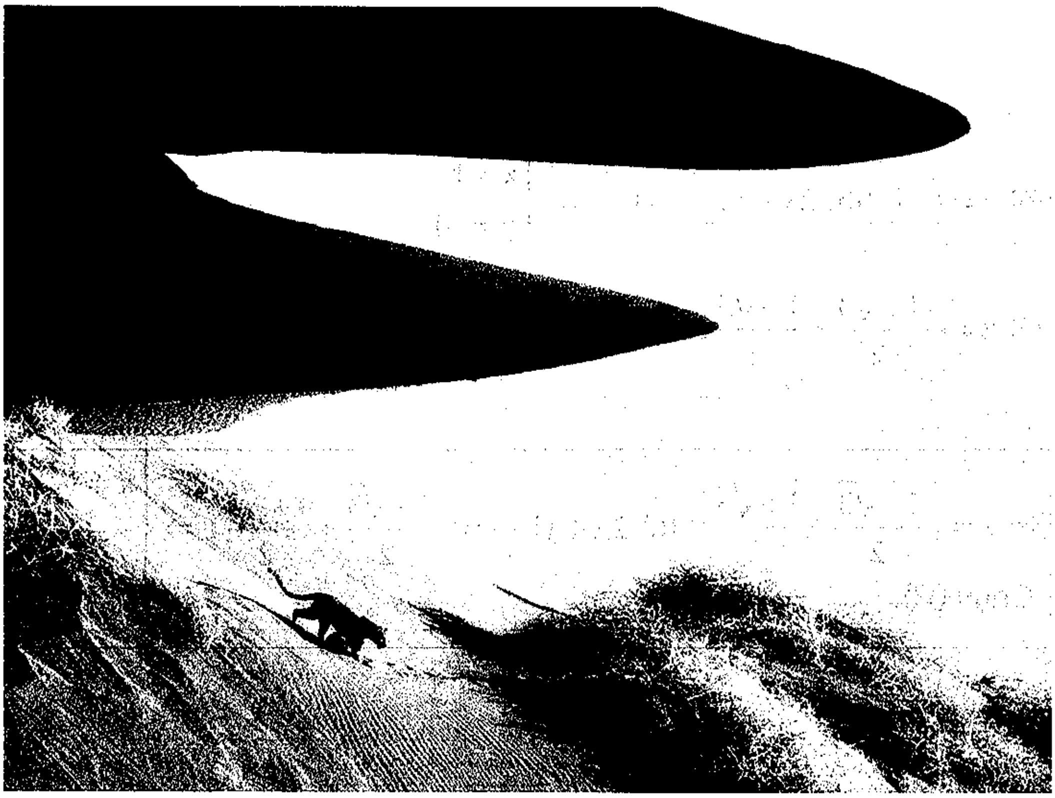
+ Với $z=1-i$ thì: $2x+yi-1=1-i\Leftrightarrow\begin{cases}x=1\\y=-1\end{cases}$.

+ Với $z=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i$ thì $2x+yi-1=-\frac{1+\sqrt{3}}{2}+\frac{1-\sqrt{3}}{2}i\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1-\sqrt{3}}{4}\\y=\frac{1-\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

+ Với $z=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i$ thì $2x+yi-1=-\frac{1-\sqrt{3}}{2}+\frac{1+\sqrt{3}}{2}i\Leftrightarrow\begin{cases}x=\frac{1+\sqrt{3}}{4}\\y=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\end{cases}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Sossusvlei



Sossusvlei nằm trong sa mạc ven biển của Namibia, đây là nơi có những cồn cát cao nhất thế giới và cảnh quan sa mạc độc đáo

VẤN ĐỀ 5

DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC

I. KIẾN THỨC CƠ BẢN

1. Số phức dưới dạng lượng giác

1.1. Acgumen của số phức $z \neq 0$

Định nghĩa 1: Cho số phức $z \neq 0$. Gọi M là điểm trong mặt phẳng phức biểu diễn số phức z. Số đo (radian) của mỗi góc lượng giác tia đầu Ox tia cuối OM được gọi là một acgumen của z.

Chú ý: Nếu φ là một acgumen của z thì mọi acgumen của z có dạng $\varphi + k2\pi, k \in \mathbb{Z}$.

Ví dụ 1

a) Số thực dương tùy ý có một acgumen là 0.

b) Số thực âm tùy ý có một acgumen là π.

c) Các số 2i, -3i, 5 + 5i theo thứ tự có một acgumen là: $\frac{\pi}{2}; -\frac{\pi}{2}$ và $\frac{\pi}{4}$.

1.2. Dạng lượng giác của số phức

Xét số phức $z = a + bi \neq 0$, $a, b \in \mathbb{R}$.

Kí hiệu r là môđun của z và φ là một acgumen của z thì: $\begin{cases} a = r\cos\varphi \\ b = r\sin\varphi \end{cases}$.

Vậy z có thể được viết dưới dạng: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Định nghĩa 2: Dạng $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, trong đó $r > 0$, được gọi là dạng lượng giác của số phức $z \neq 0$. Còn dạng $z = a + bi \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$ được gọi là *dạng đại số của số phức* z.

Nhận xét: Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ của số phức $z = a + bi \neq 0, a, b \in \mathbb{R}$, ta cần:

1) Tìm môđun của z: $r = \sqrt{a^2 + b^2}$.

2) Tìm một acgumen φ của z, sao cho $\begin{cases} \cos\varphi = \frac{a}{r} \\ \sin\varphi = \frac{b}{r} \end{cases}$ (số φ cũng là số đo một góc lượng *giác tia đầu Ox, tia cuối OM).*

Ví dụ 2

a) Số 3 có môđun bằng 3, có một acgumen bằng 0 nên nó có dạng lượng giác là: $3(\cos 0 + i\sin 0)$

b) Số -3 có môđun bằng 3, có một acgumen bằng π nên nó có dạng lượng giác là: $3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

c) Số $1+\sqrt{3}i$ có môđun bằng $\sqrt{1^2+\left(\sqrt{3}\right)^2}=2,$ có một acgumen là φ sao cho $\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{1}{2}\\ \sin\varphi=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=\dfrac{\pi}{3}\Rightarrow$ nó có dạng lượng giác là: $2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right).$

2. Nhân và chia số phức dưới dạng lượng giác

Định lí: Nếu $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), z'=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi'), (r\ge 0, r'\ge 0)$ thì

$zz'=rr'\left[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')\right],$

$\dfrac{z'}{z}=\dfrac{r'}{r}\left[\cos(\varphi'-\varphi)+i\sin(\varphi'-\varphi)\right]$ (khi $r>0$).

Ví dụ 3: Ta có: $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ và $1+\sqrt{3}i=2\left(\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)$ nên:

$$\frac{1+i}{1+\sqrt{3}i}=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right].$$

$$(1+i)\left(1+\sqrt{3}i\right)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{3}\right)\right]=2\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{12}+i\sin\frac{7\pi}{12}\right).$$

3. Công thức Moa-vrơ và ứng dụng

3.1. Công thức Moa-vrơ

Với $\forall n$ nguyên dương ta có: $\left[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi).$

Khi n = 1 thì $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi.$

Ví dụ 4: $(1+i)^4=\left[\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)\right]^4=\left(\sqrt{2}\right)^4(\cos\pi+i\sin\pi)=-4.$

3.2. Ứng dụng vào lượng giác

Ví dụ 5: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos^2\varphi+2i\cos\varphi\sin\varphi+(i\sin\varphi)^2=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi+i\sin2\varphi$

Mặt khác theo công thức Moa-vrơ thì:

$(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2=\cos2\varphi+i\sin2\varphi.$

Từ đó suy ra: $\cos2\varphi=\cos^2\varphi-\sin^2\varphi.$

3.3. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Từ công thức Moa-vrơ ta thấy số phức $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), r>0$ có hai căn bậc hai là:

$\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$ và $-\sqrt{r}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)=\sqrt{r}\left[\cos\left(\dfrac{\varphi}{2}+\pi\right)+i\sin\left(\dfrac{\varphi}{2}+\pi\right)\right].$

II BÀI TẬP

A. Khởi động

Bài tập 1 Viết số phức z = 5i dưới dạng lượng giác.

(A) $z=5\left(\sin\frac{\pi}{2}+i\cos\frac{\pi}{2}\right)$; **(B)** $z=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

(C) $z=5(\cos\pi+i\sin\pi)$; **(D)** $z=5(\sin\pi+i\cos\pi)$.

Giải:

Ta có: r = 5; $\varphi=\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)\Rightarrow$ Chọn (B).

Lưu ý: Để tìm dạng lượng giác $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ của số phức $z=a+bi\neq 0, a, b\in\mathbb{R}$, ta cần:

1. Tìm môđun của z: $r=\sqrt{a^2+b^2}$.

2. Tìm một acgumen φ của z, sao cho $\begin{cases}\cos\varphi=\frac{a}{r}\\ \sin\varphi=\frac{b}{r}\end{cases}$ (số φ cũng là số đo một góc lượng *giác tia đầu Ox, tia cuối OM).*

Nhận xét: Có thể sử dụng Casio như sau:

Chuyển sang chế độ Radian (SHIFT-MODE-4)

Nhấn 5*i* SHIFT 2 3= ta được

Do đó $z=5\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

Bài tập 2 Viết số phức z = -1 dưới dạng lượng giác.

(A) $z=\cos\pi+i\sin\pi$; **(B)** $z=\sin\pi+i\cos\pi$;

(C) $z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}$; **(D)** $z=\sin\frac{\pi}{2}+i\cos\frac{\pi}{2}$.

Giải:

Ta có: r = 1; $\varphi=\pi\Rightarrow z=\cos\pi+i\sin\pi\Rightarrow$ Chọn (A).

Bài tập 3 Viết số phức z = 3 dưới dạng lượng giác.

(A) $z=3(\cos 0+i\sin 0)$; **(B)** $z=3\left(\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}\right)$;

(C) $z=3(\cos\pi+i\sin\pi)$; **(D)** $z=3\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)$.

Giải:

Ta có: r = 3; $\varphi=0\Rightarrow z=3(\cos 0+i\sin 0)\Rightarrow$ Chọn (A).

Viết số phức z = -3i dưới dạng lượng giác.

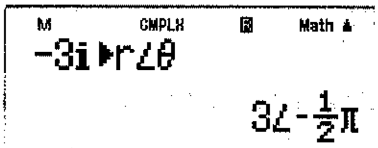
(A) $z=3\left[\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$; (B) $z=3\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$;

(C) $z=3\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$; (D) $z=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Giải:

Ta có: $r=3;\varphi=-\frac{\pi}{2}\Rightarrow z=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:



suy ra $z=3\left[\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]$.

Viết số phức $z=-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}i$ dưới dạng lượng giác.

(A) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; (B) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

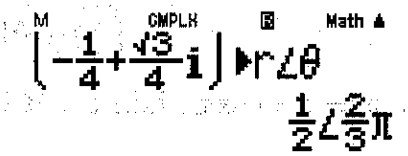
(C) $z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; (D) $z=\frac{1}{2}\left(\sin\frac{2\pi}{3}+i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$.

Giải:

Ta có: $r=\sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}=\frac{1}{2}$; $\begin{cases}\cos\varphi=-\frac{1}{2}\\ \sin\varphi=\frac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=\frac{2\pi}{3}$

$\Rightarrow z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:



suy ra:

$z=\frac{1}{2}\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$;

Viết số phức $z=8-8\sqrt{3}i$ dưới dạng lượng giác.

(A) $z=16\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; (B) $z=16\left[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$;

(C) $z=8\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$; (D) $z=8\left[\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$.

Giải:

Ta có: $r=\sqrt{8^2+\left(-8\sqrt{3}\right)^2}=16;\begin{cases}\cos\varphi=\dfrac{1}{2}\\ \sin\varphi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases}\Rightarrow\varphi=-\dfrac{\pi}{3}$

$\Rightarrow z=16\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau: M CMPLX Math ▲ (8−8i√3)▸r∠θ   16∠−⅓π   suy ra:

$z=16\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$;

Viết số phức $\left(1-i\sqrt{3}\right)(1-i)$ dưới dạng lượng giác.

(A) $2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$; **(B)** $2\sqrt{2}\left[\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$;

(C) $8\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$; **(D)** $8\left[\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$.

Giải:

Ta có: $1-i\sqrt{3}=2\left(\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right]$

$1-i=\sqrt{2}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

Áp dụng công thức nhân số phức ta được:

$\left(1-i\sqrt{3}\right)(1-i)=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

$=2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau: M CMPLX Math ▲ (1−i√3)(1−i)▸r∠θ   2√2∠−7/12π   suy ra đáp án

$2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$;

Số phức $\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$ được viết dưới dạng lượng giác là:

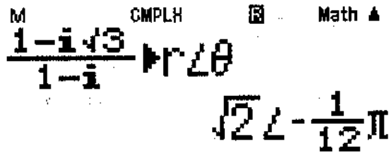
(A) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$; **(B)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$;

(C) $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$; **(D)** $\sqrt{2}\left[\sin\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)+i\cos\left(-\dfrac{\pi}{12}\right)\right]$.

Giải:

Ta có: $\frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}\right)\right]$

$=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau: 

suy ra đáp án $\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{12}\right)\right]$;

Bài tập 9 Số phức $\frac{1}{3+3i}$ được viết dưới dạng lượng giác là:

(A) $\frac{\sqrt{2}}{6}.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

(B) $\frac{\sqrt{2}}{6}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

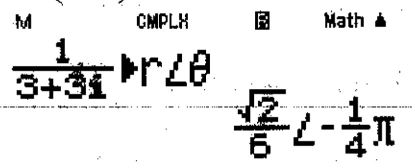
(C) $\frac{1}{18}.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$;

(D) $\frac{1}{18}.\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Giải:

Ta có: $\frac{1}{3+3i}=\frac{1}{3}.\frac{1-i}{(1+i)(1-i)}=\frac{1}{3}.\frac{1-i}{1-i^2}=\frac{1}{3}.\frac{1-i}{2}=\frac{1}{6}(1-i)$

$=\frac{1}{6}.\sqrt{2}.\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\frac{\sqrt{2}}{6}.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau: 

suy ra đáp án $\frac{\sqrt{2}}{6}.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$.

Bài tập 10 Số phức $\sin\varphi+i\cos\varphi$ được viết dưới dạng lượng giác là:

(A) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$;

(B) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}-\varphi\right)$;

(C) $\cos\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)+i\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\varphi\right)$;

(D) $\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)$.

Giải:

Ta có: $\sin\varphi+i\cos\varphi=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}-\varphi\right)\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Số phức $z=\left(1-\sqrt{3}i\right)^2$ được viết dưới dạng lượng giác là:

(A) $4\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$; **(B)** $2\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$;

(C) $4\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$; **(D)** $2\left[\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

Giải:

Cách 1: Khai triển hằng đẳng thức rồi chuyển sang dạng lượng giác.

Ta có: $z=1-2\sqrt{3}i+\left(\sqrt{3}i\right)^2=-2-2\sqrt{3}i=4\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$

$=4\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Cách 2: Viết dưới dạng lượng giác trước rồi áp dụng công thức moa-vrơ

Ta có: $1-\sqrt{3}i=2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow z=4\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]$.

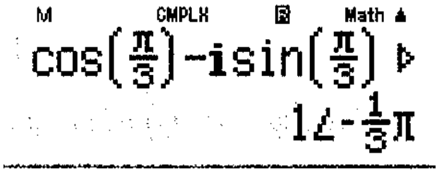
Tìm một acgumen của số phức $z=-5+5\sqrt{3}i$.

(A) $\frac{\pi}{6}$; **(B)** $\frac{2\pi}{3}$; **(C)** $\frac{\pi}{3}$; **(D)** $-\frac{\pi}{3}$.

Giải:

Ta có: $z=10\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=10\left(\cos\frac{2\pi}{3}+i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow \frac{2\pi}{3}$ là một acgumen của số phức z $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau: Nhập 

chọn đáp án A.

Tìm một acgumen của số phức $z=\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}$.

(A) $-\frac{\pi}{3}$; **(B)** $\frac{\pi}{3}$; **(C)** $\frac{2\pi}{3}$; **(D)** $-\frac{2\pi}{3}$.

Giải:

Ta có: $z=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{3}$ là một acgumen của số phức z $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Tìm một acgumen của số phức $z = 1 - \sin\varphi + i\cos\varphi \left(0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2}\right)$.

(A) φ; **(B)** $\dfrac{\varphi}{2}$; **(C)** $\dfrac{\pi}{2} + \dfrac{\varphi}{2}$; **(D)** $\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}$.

Giải:

Ta có: $z = 1 - \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \varphi\right)$

$= 2\sin^2\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) + i2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)$

$= 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)\left[\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) + i\cos\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)\right]$

$= 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right)\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right) + i\sin\left(\dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}\right)\right]$ (1)

Vì $0 < \varphi < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \dfrac{\varphi}{2} < \dfrac{\pi}{4} \Rightarrow 0 < \dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2} < \dfrac{\pi}{2} \Rightarrow 2\sin\left(\dfrac{\pi}{4} - \dfrac{\varphi}{2}\right) > 0$

$\Rightarrow$ (1) là dạng lượng giác của số phức z $\Rightarrow \dfrac{\pi}{4} + \dfrac{\varphi}{2}$ là một acgumen của số phức z

$\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Khẳng định nào dưới đây là ĐÚNG về acgumen của số phức:

$z = (\cos\varphi + i\sin\varphi)^2 + (\cos\varphi + i\sin\varphi)$?

(A) Số phức z không có acgumen xác định.

(B) Số phức z không có acgumen xác định khi $\cos\dfrac{\varphi}{2} = 0$.

(C) Nếu $\cos\dfrac{\varphi}{2} > 0$ thì $\dfrac{3\varphi}{2} + \pi$ là một acgumen của số phức z.

(D) Nếu $\cos\dfrac{\varphi}{2} < 0$ thì $\dfrac{3\varphi}{2}$ là một acgumen của số phức z.

Giải:

Ta có: $z = (\cos^2\varphi - \sin^2\varphi) + 2\sin\varphi\cos\varphi i + \cos\varphi + i\sin\varphi$

$= (\cos2\varphi + \cos\varphi) + (\sin2\varphi + \sin\varphi)i$

$= 2\cos\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2} + 2\sin\dfrac{3\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}i$

$= 2\cos\dfrac{\varphi}{2}\left(\cos\dfrac{3\varphi}{2} + i\sin\dfrac{3\varphi}{2}\right)$ (1)

+ Nếu $\cos\dfrac{\varphi}{2} > 0$ thì $\dfrac{3\varphi}{2}$ là một acgumen của số phức z.

+ Nếu $\cos\dfrac{\varphi}{2} < 0$ thì từ (1) ta có:

$$z = -2\cos\frac{\varphi}{2}\left(-\cos\frac{3\varphi}{2} - i\sin\frac{3\varphi}{2}\right)$$

$$= -2\cos\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{3\varphi}{2}+\pi\right) + i\sin\left(\frac{3\varphi}{2}+\pi\right)\right]$$

$\Rightarrow \frac{3\varphi}{2}+\pi$ là một acgumen của số phức z.

+ Nếu $\cos\frac{\varphi}{2} = 0 \Rightarrow z = 0 \Rightarrow$ số phức z không có acgumen xác định.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Khi viết số phức z dưới dạng lượng giác $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ thì r là môđun của z nên r > 0. Do đó ta phải xét các trường hợp của $\cos\frac{\varphi}{2}$ như ở trên.

Tính: $z = (1+i)^8 + (1-i)^8$.

(A) z = 32; **(B)** z = 16; **(C)** z = 8; **(D)** z = 16 + 8i.

Giải:

Ta có: $(1+i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]^8 = 16\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)^8$

$= 16(\cos 2\pi + i\sin 2\pi) = 16$

$(1-i)^8 = \left[\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i\right)\right]^8 = 16\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^8$

$= 16\left[\cos(-2\pi) + i\sin(-2\pi)\right] = 16$

Vậy $z = 16 + 16 = 32 \Rightarrow$ **Chọn (A).**

Lưu ý: Có thể bấm máy tính.

Tính số phức $z = \dfrac{(2-2i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5}{\left(-1-i\sqrt{3}\right)^{10}}$.

(A) -2^{15}; **(B)** 2^{15}; **(C)** -2^5; **(D)** 2^5.

Giải:

$$\text{Ta có: } z = \frac{\left(2\sqrt{2}\right)^{10}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10} .2^5.\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5}{2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{10}}$$

$$=\frac{2^{15}\left[\cos\left(-\frac{10\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{10\pi}{4}\right)\right]\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)}{2^{10}\left(\cos\frac{4\pi}{3}+i\sin\frac{4\pi}{3}\right)^{10}}$$

$$=\frac{2^{5}\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{3}\right)\right]}{\cos\frac{40\pi}{3}+i\sin\frac{40\pi}{3}}$$

$=2^5\left[\cos(-15\pi)+i\sin(-15\pi)\right]=-2^5 \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 18 Phần thực và phần ảo của số phức $z=\dfrac{\left(\sqrt{3}+1\right)^9}{(1-i)^{10}}$ lần lượt là:

(A) 0 và -16; **(B)** 0 và 16; **(C)** -16 và 0; **(D)** 16 và 0.

Giải:

Ta có: $z=\dfrac{\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^9}{\left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{10}}=\dfrac{2^9\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)}{2^5\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\frac{5\pi}{12}\right)\right]}$

$=2^4\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=-16.$

Vậy phần thực của z là -16 và phần ảo của z là 0 $\Rightarrow$ **Chọn (C).**

[illegible] Phần thực và phần ảo của số phức $z=\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right)\left(1+\sqrt{3}i\right)^{13}(2i)^{2017}$ lần lượt là:

(A) 0 và 2^{2017}; **(B)** 2^{2017} và 0; **(C)** 2^{2030} và 0; **(D)** 0 và 2^{2030}.

Giải:

Ta có: $z=2^{2017}\left(i^2\right)^{1008}.i.\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right).\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{13}$

$=2^{2017}i.\left(\cos\frac{\pi}{3}-i\sin\frac{\pi}{3}\right).2^{13}.\left(\cos\frac{13\pi}{3}+i\sin\frac{13\pi}{3}\right)$

$=2^{2030}i.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]\left(\cos\frac{13\pi}{3}+i\sin\frac{13\pi}{3}\right)$

$=2^{2030}i.(\cos4\pi+i\sin4\pi)=2^{2030}i.$

Vậy phần thực của z là 0 và phần ảo của z là $2^{2030} \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Bài tập 20 Khẳng định nào dưới đây là ĐÚNG về dạng lượng giác của số phức $z=\dfrac{1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)}{1+\cos\varphi+i\sin\varphi}$?

(A) Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}>0$ thì dạng lượng giác của z là: $z=-\tan\dfrac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

(B) Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}<0$ thì dạng lượng giác của z là: $z=\tan\dfrac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

(C) Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}=0$ thì dạng lượng giác không xác định.

(D) Dạng lượng giác của z xác định với mọi φ.

Giải:

Ta có: $z=\dfrac{(1-\cos\varphi)-i\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)+i\sin\varphi}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\varphi}{2}-2i\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}{2\cos^2\dfrac{\varphi}{2}+2i\sin\dfrac{\varphi}{2}\cos\dfrac{\varphi}{2}}$

$=\tan\dfrac{\varphi}{2}.\dfrac{\sin\dfrac{\varphi}{2}-i\cos\dfrac{\varphi}{2}}{\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}}=-i\tan\dfrac{\varphi}{2}.$

+ Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}>0$ thì dạng lượng giác của z là: $z=\tan\dfrac{\varphi}{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

+ Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}<0$ thì dạng lượng giác của z là: $z=-\tan\dfrac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

+ Khi $\tan\dfrac{\varphi}{2}=0$ thì dạng lượng giác không xác định.

$\Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 21 Có bao nhiêu khẳng định ĐÚNG về dạng lượng giác của các số phức $z=\left[1-(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right](1+\cos\varphi+i\sin\varphi)$?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

(a) Khi $\sin\varphi>0$ thì dạng lượng giác của z là: $z=2\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

(b) Khi $\sin\varphi<0$ thì dạng lượng giác của z là: $z=-2\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$.

(c) Khi $\sin\varphi=0$ thì dạng lượng giác không xác định.

Giải:

Ta có: $z=2\sin\dfrac{\varphi}{2}\left(\sin\dfrac{\varphi}{2}-i\cos\dfrac{\varphi}{2}\right).\cos\dfrac{\varphi}{2}\left(\cos\dfrac{\varphi}{2}+i\sin\dfrac{\varphi}{2}\right)$

$=2\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\varphi-\dfrac{\pi}{2}\right)\right]$

+ Khi $\sin\varphi > 0$ thì dạng lượng giác của z là: $z = 2\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi - \frac{\pi}{2}\right)\right]$

+ Khi $\sin\varphi < 0$ thì dạng lượng giác của z là: $z = -2\sin\varphi\left[\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)\right]$

+ Khi $\sin\varphi = 0$ thì dạng lượng giác không xác định.

$\Rightarrow$ (a), (b) và (c) đều đúng $\Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tìm phần thực và phần ảo của số phức z, biết: $z^2 = 6 - 6\sqrt{3}i$.

(A) -3 hoặc 3; **(B)** $-\sqrt{3}$ hoặc $\sqrt{3}$; **(C)** $2\sqrt{3}$ hoặc $-2\sqrt{3}$; **(D)** $\frac{\sqrt{3}}{3}$ hoặc $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

Giải:

Ta có: $6 - 6\sqrt{3}i = 12.\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 12.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow z^2 = 12.\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3.2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3.2}\right)\right] \\ z = -2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3.2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3.2}\right)\right] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \\ z = -2\sqrt{3}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right] \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} z = 2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = 3 - \sqrt{3}i \\ z = -2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right) = -3 + \sqrt{3}i \end{array}\right.$$

Vậy phần thực và phần ảo của z là: 3 và $-\sqrt{3}$ hoặc -3 và $\sqrt{3}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Có thể sử dụng Casio như sau:

Nhập $\sqrt{|6 - 6\sqrt{3}i|}\angle\frac{\arg\left(6 - 6\sqrt{3}i\right)}{2} = 3 - \sqrt{3}i$. Do đó $z = \pm\left(3 - i\sqrt{3}\right)$

Gọi z_1 và z_2 là hai nghiệm của phương trình: $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$. Viết dạng lượng giác của z_1 và z_2.

(A) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$ và $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

(B) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ và $z_2 = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

(C) $z_1 = 2\left(\sin\frac{\pi}{3} + i\cos\frac{\pi}{3}\right)$ và $z_2 = 2\left(\sin\frac{2\pi}{3} + i\cos\frac{2\pi}{3}\right)$.

(D) $z_1 = 2\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$ và $z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

Giải:

Giải phương trình: $z^2 - 2\sqrt{3}iz - 4 = 0$

Ta có: $\Delta' = 3i^2 + 4 = -3 + 4 = 1$

$\Rightarrow z_1 = \sqrt{3}i + 1; z_2 = -\sqrt{3}i - 1.$

Ta có: $z_1 = \sqrt{3}i + 1 = 2\left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

$z_2 = -\sqrt{3}i - 1 = 2\left(-\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Cho số phức z có môđun bằng 1 và φ là một acgumen của nó. Hãy tìm một acgumen của số phức $-\frac{1}{z}$.

(A) $\varphi + \frac{\pi}{2}$; **(B)** $\varphi + \pi$; **(C)** $\varphi + \frac{\pi}{4}$; **(D)** $\varphi - \frac{\pi}{2}$.

Giải:

Vì số phức z có môđun bằng 1 và φ là một acgumen nên $z = \cos\varphi + i\sin\varphi$.

Ta có: $-\frac{1}{z} = -\frac{1}{\cos\varphi - i\sin\varphi} = -(\cos\varphi + i\sin\varphi) = -\cos\varphi - i\sin\varphi$

$= \cos(\varphi + \pi) + i\sin(\varphi + \pi)$

$\Rightarrow$ acgumen cần tìm là $\varphi + \pi \Rightarrow$ **Chọn (B).**

Cho số phức z có môđun bằng 1 và φ là một acgumen của nó. Có bao nhiêu khẳng định SAI về acgumen của số phức $z^2 - z\left(\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0\right)$?

(A) 0; **(B)** 1; **(C)** 2; **(D)** 3.

(a) Có một acgumen là $\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}$ với mọi $\sin\frac{\varphi}{2} \neq 0$.

(b) Nếu $\sin\frac{\varphi}{2} > 0$ thì có một acgumen là $\frac{\pi}{2} + \frac{3\varphi}{2}$.

(c) Nếu $\sin\frac{\varphi}{2} < 0$ thì có một acgumen là $\frac{3\varphi}{2} - \frac{\pi}{2}$.

Giải:

Vì số phức z có môđun bằng 1 và φ là một acgumen nên $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

Ta có: $z^2-z=(\cos\varphi+i\sin\varphi)^2-(\cos\varphi+i\sin\varphi)=\cos2\varphi+i\sin2\varphi-(\cos\varphi+i\sin\varphi)$

$=(\cos2\varphi-\cos\varphi)+i(\sin2\varphi-\sin\varphi)=-2\sin\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}+2\cos\frac{3\varphi}{2}\sin\frac{\varphi}{2}i$

+ Nếu $\sin\frac{\varphi}{2}>0$ thì $z^2-z=2\sin\frac{\varphi}{2}\left(-\sin\frac{3\varphi}{2}+i\cos\frac{3\varphi}{2}\right)$

$=2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}\right)\right]$

$\Rightarrow$ Acgumen cần tìm là $\frac{\pi}{2}+\frac{3\varphi}{2}$.

+ Nếu $\sin\frac{\varphi}{2}<0$ thì $z^2-z=-2\sin\frac{\varphi}{2}\left(\sin\frac{3\varphi}{2}-i\cos\frac{3\varphi}{2}\right)$

$=-2\sin\frac{\varphi}{2}\left[\cos\left(\frac{3\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\cos\left(\frac{3\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\right]$

$\Rightarrow$ Acgumen cần tìm là: $\frac{3\varphi}{2}-\frac{\pi}{2}$.

$\Rightarrow$ (a) sai; (b) và (c) đúng $\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Lưu ý: Số phức z có môđun bằng 1 và φ là một acgumen thì $z=\cos\varphi+i\sin\varphi$.

C. Tăng tốc

Bài tập 26 Cho $z+\frac{1}{z}=1$ Phần thực và phần ảo của số phức $z^{2017}+\frac{1}{z^{2017}}$ lần lượt là:

(A) 1 và 0; **(B)** 0 và 1; **(C)** 2 và 0; **(D)** 0 và 2.

Giải:

Ta có: $z+\frac{1}{z}=1\Leftrightarrow z^2-z+1=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l} z=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3} \\ z=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\end{array}\right.$.

Nếu $z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}$ thì:

$$z^{2017}+\frac{1}{z^{2017}}=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2017}+\left(\frac{1}{\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}}\right)^{2017}$$

$$=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)^{2017}+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2017}$$

$= \cos\frac{2017\pi}{3} + i\sin\frac{2017\pi}{3} + \cos\left(-\frac{2017\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{2017\pi}{3}\right)$

$= 2\cos\frac{2017\pi}{3} = 2\cos\left(672\pi + \frac{\pi}{3}\right) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1 \Rightarrow$ Phần thực là 1 và phần ảo là 0.

Tương tự, nếu $z = \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)$ thì $z^{2017} + \frac{1}{z^{2017}} = 1 \Rightarrow$ Phần thực là 1 và phần ảo là 0.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 27 Viết số phức z dưới dạng lượng giác, biết rằng $|z| = \sqrt{3}$ và một acgumen của $\frac{\overline{z}}{1-\sqrt{3}i}$ là $\frac{\pi}{6}$.

(A) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; **(B)** $z = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$;

(C) $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$; **(D)** $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$.

Giải:

Gọi φ là một acgumen của z.

Vì $|z| = \sqrt{3}$ nên $z = \sqrt{3}(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$\Rightarrow \overline{z} = \sqrt{3}(\cos\varphi - i\sin\varphi) = \sqrt{3}\left[\cos(-\varphi) + i\sin(-\varphi)\right]$

$\Rightarrow -\varphi$ là một acgumen của $\overline{z}$ (1)

Ta có: $1-\sqrt{3}i = 2\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right) = 2\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]$

$\Rightarrow -\frac{\pi}{3}$ là một acgumen của $1-\sqrt{3}i$ (2)

Từ (1) và (2) $\Rightarrow -\varphi - \left(-\frac{\pi}{3}\right)$ là một acgumen của $\frac{\overline{z}}{1-\sqrt{3}i}$

$\Rightarrow -\varphi - \left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{6}$.

Vậy $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Bài tập 28 Viết số phức z dưới dạng lượng giác, biết $|z+1| = |z - i\sqrt{3}|$ và $i\overline{z}$ có một acgumen là $\frac{\pi}{3}$.

(A) $z = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$; **(B)** $z = \sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right)$;

(C) $z = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$; **(D)** $z = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$.

Giải:

Giả sử: $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), r > 0$.

Khi đó: $i\overline{z} = ir(\cos\varphi - i\sin\varphi) = r(\sin\varphi + i\cos\varphi) = r\left[\cos\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)\right]$

$\Rightarrow \frac{\pi}{2} - \varphi = \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$

$\Rightarrow z = r\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) = r\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}r + \frac{r}{2}i$

Khi đó: $|z+1| = |z - i\sqrt{3}| \Leftrightarrow \left|\frac{\sqrt{3}}{2}r + 1 + \frac{r}{2}i\right| = \left|\frac{\sqrt{3}}{2}r + \left(\frac{r}{2} - \sqrt{3}\right)i\right|$

$\Leftrightarrow \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r + 1\right)^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}r\right)^2 + \left(\frac{r}{2} - \sqrt{3}\right)^2$

$\Leftrightarrow \frac{3}{4}r^2 + \sqrt{3}r + 1 + \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4}r^2 + \frac{r^2}{4} - \sqrt{3}r + 3$

$\Leftrightarrow 2\sqrt{3}r = 2 \Leftrightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Vậy $z = \frac{\sqrt{3}}{3}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right) \Rightarrow$ **Chọn (D).**

Tìm các số n nguyên dương thỏa mãn: $z = \left(\frac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i}\right)^n$ là số thực.

(A) n là bội dương của 3.
(B) n là ước dương của 6.
(C) n là bội dương của 6.
(D) n là ước dương của 3.

Giải:

Ta có: $\frac{3 - i\sqrt{3}}{\sqrt{3} - 3i} = \frac{2\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i\right)}{2\sqrt{3}\left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}i}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$= \frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)} = \cos\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{3}\right)$

$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}$.

$\Rightarrow z = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$

Để z là số thực thì $\sin\frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \Leftrightarrow n = 6k, k \in \mathbb{Z}$

Mà n nguyên dương nên $n = 6k$, $1 \le k \in \mathbb{Z} \Rightarrow$ **Chọn (C).**

Cho số phức z thỏa mãn: $|z|+\left(1+i\sqrt{3}\right)z=3$. Môđun của số phức $\omega=z+z^2+z^{2016}$ bằng?

(A) 2; **(B)** 4; **(C)** $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$; **(D)** $\sqrt{2}$.

Giải:

Giả sử: $z=r(\cos\varphi+i\sin\varphi), r>0$.

Khi đó: $|z|+\left(1+i\sqrt{3}\right)z=3 \Leftrightarrow \left|r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\right|+\left(1+i\sqrt{3}\right).r(\cos\varphi+i\sin\varphi)=3$

$$\Leftrightarrow r+r.\left(1+i\sqrt{3}\right).(\cos\varphi+i\sin\varphi)=3$$

$$\Leftrightarrow r+2r.\left(\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}\right).(\cos\varphi+i\sin\varphi)=3$$

$$\Leftrightarrow r+2r.\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\cos\varphi+i\sin\varphi)=3$$

$$\Leftrightarrow r+2r.\left[\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=3$$

$$\Leftrightarrow r+2r\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)+2r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)i=3$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r+2r\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=3 \\ 2r\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r\left[1+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)\right]=3 \\ \sin\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} r=\dfrac{3}{1+2\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)} \\ \left[\begin{array}{l} \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=1 \\ \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=-1 \text{ (L)} \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \cos\left(\varphi+\frac{\pi}{3}\right)=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} r=1 \\ \varphi+\frac{\pi}{3}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} r=1 \\ \varphi=-\frac{\pi}{3} \end{cases}$$

$$\Rightarrow z=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right).$$

Ta có: $\omega=z+z^2+z^{2016}=\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^2$

$$+\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2016}$$

$$= \cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)+\left[\cos\left(-\frac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2\pi}{3}\right)\right]+\left[\cos\left(-\frac{2016\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{2016\pi}{3}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i+1=1-\sqrt{3}i$$

$$\Rightarrow |\omega| = \sqrt{1^2+\left(-\sqrt{3}\right)^2}=2.$$

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Bài tập 31 Acgumen âm lớn nhất của số phức $z=\left(1+i\sqrt{3}\right)^{2017}$ là:

(A) $-\frac{7\pi}{6}$; **(B)** $-\frac{5\pi}{6}$; **(C)** $-\frac{\pi}{6}$; **(D)** $-\frac{2\pi}{3}$.

Giải:

Ta có: $1+i\sqrt{3}=2\left(\frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)$

$$\Rightarrow z=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)\right]^{2017}=2^{2017}\left(\cos\frac{2017\pi}{3}+i\sin\frac{2017\pi}{3}\right)$$

$$=2^{2017}\left[\cos\left(672\pi+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(672\pi+\frac{\pi}{3}\right)\right]$$

$$=2^{2017}\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)=2^{2017}\left[\cos\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{3}+k2\pi\right)\right]$$

Ta có: $\frac{\pi}{3}+k2\pi<0 \Leftrightarrow k<-\frac{1}{6} \Rightarrow$ số k nguyên âm lớn nhất là -1

$\Rightarrow$ acgumen âm lớn nhất của z là: $\frac{\pi}{3}-2\pi=-\frac{5\pi}{6}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (B).**

Bài tập 32 Cho số phức $z_1=\left(\frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}\right)^n$ là số thực và số phức $z_2=\left(\frac{5-i}{2-3i}\right)^{n+2}$ là số ảo.

Hãy tìm số nguyên dương n nhỏ nhất.

(A) n = 2; **(B)** n = 10; **(C)** n = 16; **(D)** n = 18.

Giải:

Ta có: $\frac{\sqrt{3}-i}{1-i\sqrt{3}}=\frac{2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i\right)}{2\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)}=\frac{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}{\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}$

$$=\frac{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)}=\cos\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}\right)$$

$= \cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}.$

$\Rightarrow z_1 = \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^n = \cos\frac{n\pi}{6} + i\sin\frac{n\pi}{6}$

Để z_1 là số thực thì $\sin\frac{n\pi}{6} = 0 \Leftrightarrow \frac{n\pi}{6} = k\pi \Rightarrow n = 6k, k \in \mathbb{Z}$ (1)

Ta có: $\frac{5-i}{2-3i} = \frac{(5-i)(2+3i)}{(2-3i)(2+3i)} = \frac{10+13i-3i^2}{4-9i^2} = \frac{13+13i}{13} = 1+i$

$= \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i\right) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$\Rightarrow z_2 = \left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{n+4} = 4\left[\cos\frac{(n+4)\pi}{4} + i\sin\frac{(n+4)\pi}{4}\right]$

Để z_2 là số thuần ảo thì $4\cos\frac{(n+4)\pi}{4} = 0 \Leftrightarrow \cos\frac{n\pi}{4} = 0$

$\Leftrightarrow \frac{n\pi}{4} = \frac{\pi}{2} + m2\pi \Leftrightarrow n = 2 + 8m, m \in \mathbb{Z}$ (2)

Để n nguyên dương nhỏ nhất thì từ (1) và (2) ta có:

6k = 2 + 8m, k, m nguyên dương nhỏ nhất

$\Leftrightarrow 3k = 1 + 4m$, k, m nguyên dương nhỏ nhất

$\Rightarrow m = 2, k = 3 \Rightarrow n = 18$

Vậy n = 18 là số nguyên dương nhỏ nhất cần tìm.

$\Rightarrow$ **Chọn** (D).

Bài tập 33 Tính các tổng hữu hạn sau:

$M = 1 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \ldots$ và $N = C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots$

(A) $M = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ và $N = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$;

(B) $M = 2^n\cos\frac{n\pi}{4}$ và $N = 2^n\sin\frac{n\pi}{4}$;

(A) $M = 2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$ và $N = 2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$;

(B) $M = 2^n\sin\frac{n\pi}{4}$ và $N = 2^n\cos\frac{n\pi}{4}$.

Giải:

Ta có: $(1+i)^n = C_n^0 + iC_n^1 + i^2C_n^2 + \ldots + nC_n^n$

$= 1 - C_n^2 + C_n^4 - \ldots + i\left(C_n^1 - C_n^3 + C_n^5 - C_n^7 + \ldots\right)$ (1)

Hơn nữa $1+i=\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)$

$$\Rightarrow (1+i)^n=\left(\sqrt{2}\right)^n\left(\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}\right)=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}+i2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4} \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$M=2^{\frac{n}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}$ và $N=2^{\frac{n}{2}}\sin\frac{n\pi}{4}$.

$\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Khẳng định nào dưới đây là ĐÚNG?

(A) $C_n^0\cos a+C_n^1\cos 2a+C_n^3\cos 3a+\ldots+C_n^{n-1}\cos na+C_n^n\cos(n+1)a=2^n\cos^n\frac{a}{2}\cos\frac{n+2}{2}a.$

(B) $C_n^0\sin a+C_n^1\sin 2a+C_n^3\sin 3a+\ldots+C_n^{n-1}\sin na+C_n^n\sin(n+1)a=2^n\cos^n\frac{a}{2}\cos\frac{n+2}{2}a.$

(C) $C_n^0\cos a+C_n^1\cos 2a+C_n^3\cos 3a+\ldots+C_n^{n-1}\cos na+C_n^n\cos(n+1)a=2^n\cos^n\frac{a}{2}\sin\frac{n+2}{2}a.$

(D) $C_n^0\sin a+C_n^1\sin 2a+C_n^3\sin 3a+\ldots+C_n^{n-1}\sin na+C_n^n\sin(n+1)a=2^n\sin^n\frac{a}{2}\cos\frac{n+2}{2}a.$

Giải:

Theo công thức khai triển nhị thức Newton, ta có:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\ldots+C_n^nx^n$$

$$\Rightarrow x(1+x)^n=C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+\ldots+C_n^nx^{n+1}$$

Thay $x=\cos a+i\sin a$, ta có:

$$(\cos a+i\sin a)(1+\cos a+i\sin a)^n=C_n^0(\cos a+i\sin a)+C_n^1(\cos 2a+i\sin 2a)$$

$$+\ldots+C_n^n\left[\cos(n+1)a+i\sin(n+1)a\right]$$

$$=\left[C_n^0\cos a+C_n^1\cos 2a+\ldots+C_n^n\cos(n+1)a\right]+i\left[C_n^0\sin a+C_n^1\sin 2a+\ldots+C_n^n\sin(n+1)a\right] \quad (1)$$

Mặt khác ta có:

$$(\cos a+i\sin a)(1+\cos a+i\sin a)^n=(\cos a+i\sin a)\left(2\cos^2\frac{a}{2}+i2\sin\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}\right)^n$$

$$=2^n\cos^n\frac{a}{2}(\cos a+i\sin a)\left(\cos\frac{a}{2}+i\sin\frac{a}{2}\right)^n$$

$$= 2^n\cos^n\frac{a}{2}(\cos a + i\sin a)\left(\cos\frac{na}{2} + i\sin\frac{na}{2}\right)$$

$$= 2^n\cos^n\frac{a}{2}\left(\cos\frac{n+2}{2}a + i\sin\frac{n+2}{2}a\right) \quad (2)$$

Từ (1) và (2) ta có:

$$C_n^0\cos a + C_n^1\cos 2a + C_n^3\cos 3a + \ldots + C_n^{n-1}\cos na + C_n^n\cos(n+1)a = 2^n\cos^n\frac{a}{2}\cos\frac{n+2}{2}a.$$

$$C_n^0\sin a + C_n^1\sin 2a + C_n^3\sin 3a + \ldots + C_n^{n-1}\sin na + C_n^n\sin(n+1)a = 2^n\cos^n\frac{a}{2}\sin\frac{n+2}{2}a.$$

$\Rightarrow$ (A) đúng; (B), (C) và (D) sai $\Rightarrow$ **Chọn (A).**

Nhận xét: Để chứng minh trực tiếp các hệ thức này là không dễ, số phức là một công cụ hữu ích trong việc chứng minh các hệ thức như trên.

MỤC LỤC

Chuyên đề 1
MŨ - LOGARIT

VẤN ĐỀ 1: LŨY THỪA - MŨ - LOGARIT

VẤN ĐỀ 2
PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

VẤN ĐỀ 3
BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ VÀ LÔGARIT

VẤN ĐỀ 4
HỆ PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ BẤT PHƯƠNG TRÌNH MŨ - LÔGARIT

Chuyên đề 2
SỐ PHỨC

HÀNH TRÌNH GHI NHỚ CÔNG THỨC TOÁN CỦA EM

STT	Công thức	STT	Công thức

HÀNH TRÌNH GHI NHỚ CÔNG THỨC TOÁN CỦA EM

STT	Công thức	STT	Công thức

HÀNH TRÌNH GHI NHỚ CÔNG THỨC TOÁN CỦA EM

STT	Công thức	STT	Công thức

HÀNH TRÌNH GHI NHỚ CÔNG THỨC TOÁN CỦA EM

STT	Công thức	STT	Công thức

NHÀ XUẤT BẢN ĐẠI HỌC QUỐC GIA HÀ NỘI

16 Hàng Chuối, Hai Bà Trưng, Hà Nội.

Điện thoại: Biên tập (04) 39714896

Quản lý xuất bản: (04) 39728806; Tổng biên tập: (04) 39715011

Fax: (04) 39729436

Chịu trách nhiệm xuất bản

Giám đốc - Tổng biên tập:

TS. PHẠM THỊ TRÂM

Biên tập: **Đặng Thị Phương Anh, Ngô Bá Thành**

Sửa bản in: **Tác giả**

Chế bản: **Lam Hạnh**

Vẽ bìa: **Trọng Kiên**

NÂNG CAO KỸ NĂNG GIẢI TOÁN TRẮC NGHIỆM

100% DẠNG BÀI MŨ - LOGARIT - SỐ PHỨC

Mã số: 1L-393 PT2017

In 3.000 cuốn, khổ 20,5x29,5cm, tại Công ty In và TM Hải Nam

Địa chỉ: Số 18, ngách 68/53/9, P. Quan Hoa, Q. Cầu Giấy, Hà Nội

Số xác nhận đăng ký xuất bản: 1996-2017/CXB,IPH/2-227/ĐHQGHN ngày 22/6/2017

Quyết định xuất bản số: 407 LK-TN/QĐ-NXBĐHQGHN, ngày 10/7/2017

In xong và nộp lưu chiểu năm 2017

Mã ISBN: 978-604-62-8841-1